

KÜMELER

2

- **KÜME** : Matematiğin tanımlamadığı kavramlardan biri de kümedir. Kümeye, iyi tanımlanmış nesneler topluluğu diyebiliriz.

- Kümeyi oluşturan nesnelere *kümenin elemanları* denir.

$$s(A) : A \text{ kümesinin eleman sayısı}$$

- Bir kümenin elemanlarının küme içinde yer değiştirmesi kümeyi değiştirmez.

$$A = \{a,b,c\} = \{c,a,b\} = \{b,c,a\} \dots$$

- Kümede her eleman bir kez yazılır.

$$A = \{a,a,b,1,2,1\} = \{a,b,1,2\}$$

● **KÜMELERİN GÖSTERİMİ** :

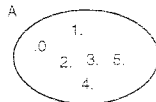
- **Liste Yöntemi** : Kümenin elemanlarının $\{ \}$ sembolü içine - aralarında virgüli olacak şekilde - yazılmasıdır.

$$A = \{0,1,2,3,4,5\}$$

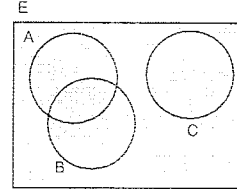
- **Ortak Özellik Yöntemi** : Kümenin elemanlarının " : " veya " { " sembolü ("öyle ki" okunur) kullanılarak ortak özelliklerine göre yazılmasıdır.

$$A = \{x : x, 6 \text{ dan küçük doğal sayı}\}$$

- **Venn Şeması** : Kümenin elemanlarının kapalı bir eğri içerisinde - elemanın yanında bir nokta olacak şekilde yazılmasıdır.



- **EVRENSEL KÜME** : Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan kümeye *evrensel küme* denir. E harfi ile gösterilir. Evrensel küme; gerekli tüm elemanları içerecek kadar geniş, gereksiz tüm elemanları dışlayacak kadar dar seçilmelidir.



- **BOŞ KÜME** : Elemanı olmayan kümeye *boş küme* denir. $\emptyset$ veya $\{ \}$ ile gösterilir.

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}, \quad \emptyset \neq \{0\}$$

- **SONLU - SONSUZ KÜMELER** : Eleman sayısı sonlu olan kümeye sonlu küme, eleman sayısı sonlu olmayan kümelere ise sonsuz küme adı verilir.

$$s(A) = n \quad \text{ise} \quad A : \text{Sonlu küme}$$

$$s(A) \rightarrow \infty \quad \text{ise} \quad A : \text{Sonsuz küme}$$

- **DENK KÜMELER** : Eleman sayıları aynı olan kümelere *denk kümeler* denir. Örnek :

$$A = \{1,2,3\} \text{ ve } B = \{a,b,c\} \text{ ise } A = B.$$

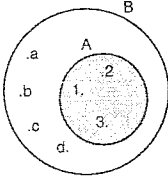
$$s(A) = s(B) \Leftrightarrow A = B$$

- **EŞİT KÜMELER** : Elemanları aynı olan kümelere *eşit kümeler* denir. Örnek :

$$A = \{7,8,9\} \text{ ve } B = \{x : 6 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\} \text{ ise } A = B \text{ dir.}$$

- **ALT KÜME** : A ve B iki küme olmak üzere, A'nın her elemanı B'nin de elemanı oluyorsa A'ya B'nin alt kümesi denir.

$A \subset B$ veya $B \supset A$ şeklinde yazılabilir.

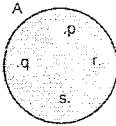


Şekilde $A \subset B$ olduğu görülmektedir.

□ **Alt Kümenin Özellikleri :**

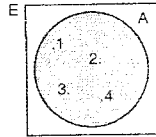
- i. Her küme kendisinin bir alt kümesidir.

$$A \subset A$$



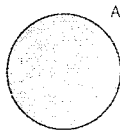
- ii. Her küme evrensel kümenin bir alt kümesidir.

$$A \subset E$$



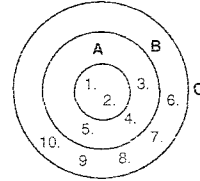
- iii. Boş küme her kümenin bir alt kümesidir.

$$\emptyset \subset A$$



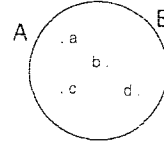
iv.

$$A \subset B \text{ ve } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$



v.

$$A \subset B \text{ ve } B \subset A \Rightarrow A = B$$



- vi. n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı :

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Bu formül için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz.

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

$$C(0, 0) = 1$$

$$C(n, 0) = C(n, n) = 1$$

$$C(n, 1) = C(n, n-1) = n$$

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \dots + C(n, n) = 2^n$$

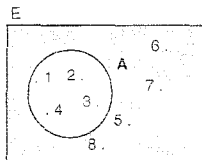
- vii. n elemanlı bir kümenin

Bir kümenin, kendisi dışındaki bütün alt kümelerine, bu kümenin **öz alt kümeleri** denir.

$$\begin{aligned} \text{Alt kümelerinin sayısı} &: 2^n \\ \text{Öz alt kümelerinin sayısı} &: 2^n - 1 \end{aligned}$$

- **TÜMLEYEN** : Evrensel kümenin elemanlarından A'nın elemanları çıkarılarak elde edilen kümeye A'nın *tümleyeni* denir ve "A'" veya "Ā" ile gösterilir.

$$A' = \{x : x \notin A \wedge x \in E\}$$



$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A' = \{5, 6, 7, 8\}$$

□ **Tümleme Özellikleri** :

i. $(A')' = A$

ii. $E' = \emptyset$

iii. $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

- **KUVVET KÜMESİ** : Bir kümenin bütün alt kümelerinin oluşturduğu kümeye bu kümenin *kuvvet kümesi* denir.

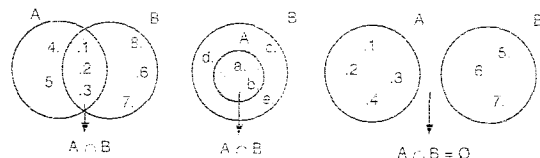
$$A = \{1, 2, 3\} \text{ kümesinin kuvvet kümesi } P(A) \text{ olsun.}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \text{ dir.}$$

□ n elemanlı bir kümenin *kuvvet kümesinin eleman sayısı* 2^n dir.

- **KESİŞİM** : A ve B kümesinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B'nin *kesişim kümesi* denir ve " $A \cap B$ " ile gösterilir.

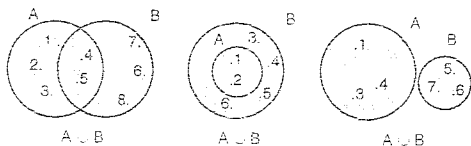
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



□ Ortak elemanı olmayan kümelere *ayrık kümeler* denir.

- **BİRLEŞİM** : A veya B kümelerinin elemanlarından oluşan kümeye A ile B'nin *birleşim kümesi* denir ve " $A \cup B$ " ile gösterilir.

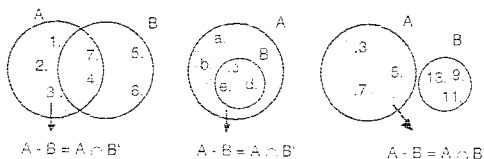
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



- **FARK** : A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A'nın elemanı olup da B'nin elemanı olmayan elemanların kümesine A fark B *kümesi* denir. Fark kümesi " $A - B$ " veya " $A \setminus B$ " ile gösterilir.

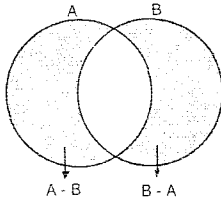
$$A - B = A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A - B = A \cap B'$$



- **SİMETRİK FARK :** A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A - B ile B - A'nın birleşimine A ile B'nin simetrik farkı denir ve " $A \Delta B$ " ile gösterilir.

$$A \Delta B = \{x : x \in A - B \vee x \in B - A\}$$



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

● **KÜMELERDE BAZI ÖZELLİKLER :**

□ **Kesişim ve Birleşim İle İlgili Özellikler :**

i. **Tek Kuvvet Özelliği :**

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

ii. **Değişme Özelliği :**

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

iii. **Birleşme Özelliği :**

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

iv. **Dağılım Özelliği :**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

v. **De Morgan Kuralı :**

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

vi. **Diğer Bazı Özellikler :**

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap E = A, \quad A \cup E = E$$

$$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = E$$

vii. $s(A)$, $s(B)$ ve $s(C)$ sırasıyla A, B ve C kümelerinin eleman sayıları olmak üzere :

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

□ **Fark ve Simetrik Farkla İlgili Özellikler :**

i. $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

ii. $A - \emptyset = A$

iii. $E - A = A'$

iv. $(A - B)' = A' \cup B$

v. $(A - B) \cup B = A \cup B$

vi. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

vii. $s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A)$

● **RAKAM** : Sayıları göstermeye yarayan işaretlere *rakam* denir. 2, a, α, π ... gibi.

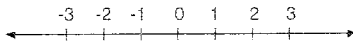
● **SAYI** : Rakamların bir araya gelmesiyle oluşturulan ve matematiksel işlem yapmaya yarayan ifadelere *sayı* denir.

576, IV, e, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{8}$, $-\frac{5}{3}$... gibi.

● **DOĞAL SAYI** : $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına bir *doğal sayı* denir.

● **SAYMA SAYISI** : $N^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına bir *sayma sayısı* denir.
 $N^+ = N - \{0\}$ dir.

● **TAMSAYI** : $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına bir *tamsayı* denir.



Sayı eksenı üzerindeki her tamsayı solundaki tüm sayılardan büyük, sağındaki tüm sayılardan küçüktür.

$Z^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$: Negatif tam sayıların kümesi,

$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: Pozitif tamsayıların kümesidir.

$Z^- \subset Z$, $Z^+ \subset Z$ ve $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$.

● **RASYONEL SAYI** : $Q = \{\frac{a}{b} : a \in Z, b \in Z \text{ ve } b \neq 0\}$ kümesinin her bir elemanına *rasyonel sayı* denir.

$\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{4}$, 5, -2, 0 ... gibi

● **İRRASYONEL SAYI** : $Q' = \{x : x \notin Q\}$.

a, b $\in Z$ olmak üzere, $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan gerçek sayılara *irrasyonel sayılar* denir.

$\pi = 3.1415926535897932 \dots$

$e = 2.71828182844590452 \dots$

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950 \dots$ gibi.

NOT : İrrasyonel sayıların ondalık kısmı tahmin edilemez.

● **REEL (GERÇEK) SAYI** : Sayı eksenı üzerinde gösterilebilen her bir gerçek değer bir *reel sayı* belirtir. Reel sayılar kümesi $IR = Q \cup Q'$ olarak ifade edilebilir.

● **KOMPLEKS (KARMAŞIK) SAYI** :

$C = \{a+bi \mid a \in IR, b \in IR, i = \sqrt{-1}\}$ kümesinin her bir elemanı bir *kompleks sayı* belirtir.

● **ÇİFT SAYI** : 2 ile tam bölünebilen tamsayılara *çift sayı* denir.

Çift sayıların genel terimi : $2n$

$Z_c = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots, 2n, 2n+2, 2n+4, \dots\}$, $n \in Z$

● **TEK SAYI** : 2 ile tam bölünemeyen tam sayılara *tek sayı* denir.

Tek sayıların genel terimi : $2n-1$

$Z_t = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2n+1, 2n+3, \dots\}$, $n \in Z$

□ **T** : *teksayı*, **Ç** : *çiftsayı* olmak üzere :

$T+T=\text{Ç}$	$T \cdot T=T$	$n \in Z^- \text{ için}$
$T+\text{Ç}=T$	$T \cdot \text{Ç}=\text{Ç}$	$T^n=T$
$\text{Ç}+\text{Ç}=\text{Ç}$	$\text{Ç} \cdot \text{Ç}=\text{Ç}$	$\text{Ç}^n=\text{Ç}$

□ a, b, c ... çarpımı bir tek sayıya eşit ise a, b, c, ... nin herbiri teksayıdır. a, b, c ... çarpımı bir çift sayıya eşit ise a, b, c ... nin en az biri çiftsayıdır. (a, b, c ... $\in Z$)

□ Tek veya çift kavramları ancak tamsayılar için geçerlidir.

- **ASAL SAYI** : 1 ve kendisinden başka böleni olmayan, 1 den büyük tamsayılardan herbirine *asal sayı* denir. Asal sayılar kümesi $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ dir.

Asal sayılar kümesini "pozitif bölenleri kümesi 2 elemanlı olan doğal sayılar" şeklinde de tanımlayabiliriz.

- En küçük asal sayı 2 dir.
 - 2 den başka çift asal sayı yoktur.
 - Negatif ve ondalıklı asal sayı olmaz.
 - 1 asal değildir.
 - Asal sayıları veren genel bir formül yoktur.
- **ASAL ÇARPAN** : Bir sayının pozitif çarpanlarından asal olanlarına bu sayının *asal çarpanları* denir.

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ dir. O halde, 72'nin asal çarpanları 2 ve 3 tür.

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ dir. O halde, 120'nin asal çarpanları 2, 3 ve 5 tir.

- **ARALARINDA ASALLIK** : En büyük ortak bölenleri 1 olan iki tam sayıya aralarında *asal sayılar* denir. Bir başka ifadeyle sadeleşemeyen tamsayılara *aralarında asaldır* denir. 8 ve 15 sadeleşemez. O halde bu iki sayı aralarında asaldır.

- **ARDIŞIK SAYILAR** : Belli bir kurala göre oluşturulan sayı dizilerine *ardışık sayılar* denir.

- *Ardışık Tamsayılar* : $\dots, n, n+1, n+2, \dots (n \in \mathbb{Z})$
- *Ardışık Çiftsayılar* : $\dots, 2n, 2n+2, 2n+4, \dots (n \in \mathbb{Z})$

- **ARDIŞIK SAYILARIN SONLU TOPLAM FORMÜLLERİ** :

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$
- $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

- **PRATİK TOPLAMA FORMÜLÜ** :

r : ilk terim, n : son terim, x : artış miktarı olmak üzere, bir aritmetik dizinin terimleri aşağıdaki genel formülle pratik olarak toplanabilir.

$$r + (r+x) + (r+2x) + \dots + n = \frac{(n+r)(n-r+x)}{2x}$$

- **TAMSAYILARDA ÖZEL FORMÜLLER** :

$A = x^m \cdot y^n \cdot z^p$, x, y, z asal, $m, n, p \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

- *A'nın pozitif tam bölenlerinin sayısı* :

$$(m+1) \cdot (n+1) \cdot (p+1)$$

- *A ile aralarında asal ve A'dan küçük tamsayıların sayısı*:

$$x^m \cdot y^n \cdot z^p \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

- *A'nın pozitif tam bölenlerinin toplamı* :

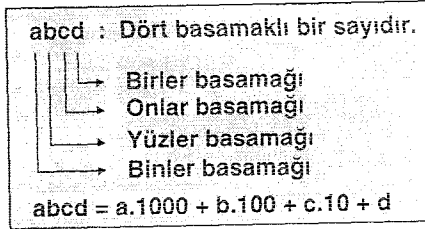
$$\frac{x^{m+1}-1}{x-1} \cdot \frac{y^{n+1}-1}{y-1} \cdot \frac{z^{p+1}-1}{z-1}$$

- *Bir sayının pozitif tam bölenleri kadar negatif tam böleni vardır. Bu durumda bir sayının tam bölenlerinin toplamı 0 dir diyebiliriz.*

- *A'nın pozitif tam bölenlerinin çarpımı* :

$$A^{\frac{(m+1)(n+1)(p+1)}{2}}$$

- **SAYI BASAMAĞI** : Bir sayıyı oluşturan rakamlardan herbirine bu sayının *basamağı* denir.



- **TABAN** : Bir sayının tanımlandığı *sayma sistemine* bu sayının *tabanı* denir.

$(3975)_{10}$: 10 tabanında 4 basamaklı bir sayıdır.

$(123)_4$: 4 tabanında 3 basamaklı bir sayıdır.

□ Basamaktaki sayılar tabana eşit veya tabandan büyük olamaz.

- **SAYININ ÇÖZÜMLENMESİ** : Bir sayının verildiği tabanın tamsayı kuvvetlerine göre ayrıştırılmasına bu sayının *çözümlemesi* denir.

$$578 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

$$(2122)_3 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

$$(52)_6 = 5 \cdot 6^1 + 2 \cdot 6^0$$

$$7.82 = 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

$$(12,314)_5 = 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^{-1} + 1 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-3}$$

- **TABAN DEĞİŞTİRME** :

Aşağıdaki taban değiştirme işlemlerini inceleyiniz.

$$85 \equiv (x)_4 \Rightarrow \begin{array}{r} 85 \div 4 = 21 \text{ } 1 \\ 21 \div 4 = 5 \text{ } 1 \\ 5 \div 4 = 1 \text{ } 1 \\ 1 \div 4 = 0 \text{ } 1 \end{array}$$

$$(1111)_4 = 85$$

$$48 \equiv (x)_3 \Rightarrow \begin{array}{r} 48 \div 3 = 16 \text{ } 0 \\ 16 \div 3 = 5 \text{ } 1 \\ 5 \div 3 = 1 \text{ } 2 \\ 1 \div 3 = 0 \text{ } 1 \end{array}$$

$$(1210)_3 = 48$$

- **OBEB - OKEK** :

□ $OBEB(A,B) = A$ ve B 'yi tam bölen en büyük doğal sayıya A ile B 'nin *Ortak Bölenlerinin En Büyüğü* veya kısaca *OBEB* denir. (OBEB, EBOB şeklinde de gösterilebilir.)
72 ve 48'i tam bölen doğal sayıların kümesi;
(1,2,3,4,6,8,12,24), $OBEB(72,48) = 24$ tür.

□ $OKEK(A,B) = A$ ve B 'ye tam bölünen en küçük doğal sayıya A ile B 'nin *Ortak Katlarının En Küçüğü* veya kısaca *OKEK*'i denir. (OKEK, EKOK şeklinde de gösterilebilir.)

12 ve 8 sayıları {24,48,72,96, ...} doğal sayılarını tam bölerler. O halde $OKEK(12,8) = 24$ tür.

- **OBEB ve OKEK'i BULMAK** :

$$24 \quad 36 \quad \textcircled{2} \quad OBEB(24,36) = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

$$\begin{array}{r} 12 \quad 18 \quad \textcircled{2} \\ 6 \quad 9 \quad \textcircled{2} \\ 3 \quad 3 \quad \textcircled{3} \end{array} \quad \text{OBEB her iki sayıyı da bölenlerin çarpımıdır.}$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad OKEK(24,36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

OKEK iki sayının her ikisini veya yalnız birini bölenlerin çarpımıdır.

$$\square \quad (A,B)_{OKEK} \leq A \cdot B$$

$$\square \quad A \cdot B = (A,B)_{OBEB} \cdot (A,B)_{OKEK}$$

$$\square \quad \text{A ile B aralarında asal ise, } (A,B)_{OBEB} = 1, (A,B)_{OKEK} = A \cdot B$$

- Rasyonel iki sayının OBEB ve OKEK'ini bulmak :

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \right)_{OBEB} = \frac{(a,d,b,c)_{OBEB}}{(b,d)_{OKEK}}$$

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \right)_{OKEK} = \frac{(a,c)_{OKEK}}{(b,d)_{OBEB}}$$

● BİR TAMSAYININ AYRIŞTIRILMASI :



$$\begin{aligned} p &= q \cdot r + k \\ 0 &\leq k < q, q \neq 0 \end{aligned}$$

- Yukarıda verilen bölme işleminde p, q, r, k doğal sayılar, $q \neq 0$ ve $q > k$ olmak üzere; p sayısı q ile r 'nin çarpımına k eklenerek elde ediliyorsa, p 'nin q ile bölümünden *bölüm r , kalan k 'dir* denir. p 'nin "bölün-bölüm-kalan" türünden ifade edilmesine, *p 'nin ayrıştırılması* adı verilir.
- $p = q \cdot r + k$ eşitliğinde $k = 0$ ise p sayısı q ile (veya r ile) tam bölünür denir.
- $p = q \cdot r$ ifadesine de p 'nin çarpanlara ayrılması adı verilir.

● TAMSAYILARDA BÖLEN-KALAN İLİŞKİSİ :

- $A, B, x, k_1, k_2, m \in \mathbb{Z}^+$ birer tamsayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere:
A'nın x 'e bölümünden kalan k_1 ,
B'nin x 'e bölümünden kalan k_2 olsun.

A.B'nin x 'e bölümünden kalan $k_1 \cdot k_2$,
 $A \pm B$ 'nin x 'e bölümünden kalan $k_1 \pm k_2$,
 $m.A$ 'nın x 'e bölümünden kalan $m.k_1$,
 A^n 'nin x 'e bölümünden kalan k_1^n dir.

- Yukarıdaki işlemlerde kalan değerler x 'den büyük ise, tekrar x 'e bölünerek kalanlar bulunur.

- x ve y birer tamsayı olmak üzere:
Bir A sayısı $x \cdot y$ ile tam bölünüyorsa, A sayısı hem x , hem de y ile tam bölünür. Fakat bu ifadenin karşıtı her zaman doğru değildir.
 A sayısı x ile y 'nin OKEK'i ile tam bölünür diyebiliriz.

$$\frac{A}{x \cdot y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{A}{x} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{A}{y} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{A}{x} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{A}{y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists \frac{A}{x \cdot y} \notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{A}{x \cdot y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{A}{\text{OKEK}(x, y)} \in \mathbb{Z}$$

● TAM BÖLÜNEBİLME KURALLARI :

- **2 ile :** Tüm çift sayılar 2 ile tam bölünür.
- **3 ile :** Rakamları toplamı 3'ün katı olan sayılar 3 ile tam bölünür.
- **5 ile :** Birler basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür.
- **7 ile :** $(a_n \dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)$ $n+1$ basamaklı sayısı 7 ile tam bölünüyorsa (1-3-2) kuralını sağlar.

$$\begin{aligned} & \mathbf{1 - 3 - 2 \text{ Kuralı :}} \\ & (1a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (1a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \dots = 0 \vee 7k \end{aligned}$$

- **11 ile :** $(a_n \dots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)$ $n+1$ basamaklı sayısı 11 ile tam bölünüyorsa ($\pm$) kuralını sağlar.

$$\begin{aligned} & \mathbf{\pm \text{ kuralı}} \\ & (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots) = 0 \vee 11k \end{aligned}$$

- **4 ile :** Bir sayının birler ve onlar basamağının oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ile bölünüyorsa, bu sayının kendisi 4 ile tam bölünür.

- ❑ **8 ile** : Bir sayının birler, onlar ve yüzler basamağının oluşturduğu üç basamaklı sayı 8 ile bölünüyorsa bu sayının kendisi 8 ile tam bölünür.
- ❑ **9 ile** : Rakamları toplamı 9'un katı olan sayılar 9 ile tam bölünür.
- ❑ **10 ile** : Son rakamı 0 olan sayılar 10 ile tam bölünür.
- ❑ **6 ile** : Sayı 3 ve 2 ile tam bölünmelidir.
- ❑ **12 ile** : Sayı 4 ve 3 ile tam bölünmelidir.
- ❑ **18 ile** : Sayı 9 ve 2 ile tam bölünmelidir.
- ❑ **36 ile** : Sayı 9 ve 4 ile tam bölünmelidir.
- ❑ **84 ile** : Sayı 12 ve 7 ile tam bölünmelidir.

Bu ifadelerden anlaşıldığı gibi, asal olmayan bir sayının tam bölünme kuralları bulunurken o sayı *aralarında asal çarpanlarına* ayrılmalıdır.

● RASYONEL SAYILAR ve İŞLEMLERİ :

a, b birer tamsayı ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ ifadesine *rasyonel sayı* denir.

a'ya rasyonel sayının payı, b'ye ise paydası adı verilir.

- ❑ **Basit kesir** : Payı paydasından mutlak değerce küçük

olan kesre *basit kesir* denir. $-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, 0$ gibi.

$$-1 < \frac{a}{b} < 1 \text{ ise } \frac{a}{b} \text{ basit kesirdir.}$$

- ❑ **Bileşik kesir** : Payı paydasından mutlak değerce büyük veya payı paydasına mutlak değerce eşit olan kesre *bileşik kesir* denir.

$\frac{7}{2}, \frac{10}{3}, 5$ gibi.

$$\frac{a}{b} \leq -1 \text{ veya } \frac{a}{b} \geq 1 \text{ ise } \frac{a}{b} \text{ bileşik kesirdir.}$$

- ❑ **Devirli Ondalık Sayı** : Bir rasyonel sayı ondalıklı yazıldığında, ondalık kısımdaki sayılar belli bir rakamdan sonra tekrar ediyorsa bu sayıya *devirli ondalık sayı* denir.

$$0,\overline{abc} = 0,abcbcbcbcb... = \frac{abc - a}{990}$$

- ❑ Bir devirli ondalık sayıyı aşağıdaki şekilde ayrıştırarak rasyonel sayı halinde yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Tüm} \\ \text{sayı} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Devretmeyen} \\ \text{sayı} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Devreden kadar 9} \\ \text{Devretmeyen kadar 0} \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{Devreden kadar 9} \\ \text{Devretmeyen kadar 0} \end{array}} \right\} \text{Bu ifade ondalıklı kısım için geçerlidir.}$$

- ❑ **Rasyonel Sayılarda İşlemler** :

- i. **Toplama - Çıkarma** : Paydalar OKEK'lerinde eşitlenir.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

- ii. **Çarpma** : Paylar paylarla, paydalar paydalarla çarpılır.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- iii. **Bölme** : Paydaki kesir aynen yazılır, paydadaki kesir ters çevrilip çarpılır.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

❑ İşlem Önceliği :

Rasyonel sayılarda işlem sırası şu şekildedir :

- 1°. Parantezler ve ana kesir çizgileri işleme yön verir.
- 2°. Üslü işlemler varsa yapılır.
- 3°. Çarpma - Bölme işlemleri yapılır.
- 4°. Toplama - Çıkarma işlemleri yapılır.

Not: "Çarpma-Bölme" veya "Toplama-Çıkarma" işlemleri kendi aralarında sıralamaya konulmamıştır.

Problemde parantez kullanılarak işlemin akışı sağlanmalıdır.

❑ Rasyonel Sayılarda Sıralama :

- Paydaları eşit olan pozitif iki rasyonel sayıdan payı büyük olan diğerinden daha büyüktür.
- Payları eşit olan pozitif iki rasyonel sayıdan paydası büyük olan diğerinden daha küçüktür.

Negatif rasyonel sayılar için bu kuralların tersi uygulanır.

- **GERÇEK (REEL) SAYILAR :** Sayı eksenini üzerinde gösterilebilen sayılara *reel sayı* denir. Gerçek sayılar kümesi *rasyonel ve irrasyonel* sayılar kümesinin birleşimidir.

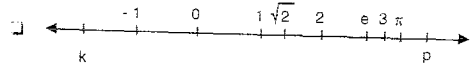
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Her gerçek sayı, sayı doğrusunun yalnız bir noktasına karşılık gelir. Bu ifadenin karşısı da doğrudur.

❑ Pozitif ve negatif sayılar :

- ❑ Sayı doğrusunun sıfıra göre sağ tarafında bulunan gerçek sayılara *pozitif gerçek sayılar*, sol tarafındakilere ise *negatif gerçek sayılar* denir.

Pozitif veya negatif kavramları gerçek sayılar için geçerlidir.



Verilen sayı doğrusunda k sıfırın solunda, p de sağındadır. Bu ifade $k < 0$ ve $p > 0$ şeklinde gösterilir.

- ❑ Sıfırın işareti yoktur.

❑ Pozitif ve negatif sayılarda çarpma işlemi :

(+)	.	(+)	=	+
(-)	.	(-)	=	+
(+)	.	(-)	=	-
(-)	.	(+)	=	-

Aynı işaretli iki sayının çarpımı pozitif (+), zıt işaretli iki sayının çarpımı negatif (-) dir.

Not : Yukarıda verilen işaret tablosu bölme için de geçerlidir.

❑ Gerçek sayının kuvveti :

(+)	ⁿ	=	+
(-)	²ⁿ	=	+
(-)	²ⁿ⁻¹	=	-

Pozitif sayıların tüm kuvvetleri pozitifdir. Negatif sayıların ise çift kuvvetleri pozitif, tek kuvvetleri negatiftir.

❑ Gerçek sayılarda eşitliğin özellikleri :

a, b, c herhangi üç gerçek sayı olmak üzere :

i. Bir eşitliğin her iki yanına aynı sayı eklenip çıkarıldığında eşitlik bozulmaz.

$$a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$$

ii. Bir eşitliğin her iki yanını aynı sayıyla çarpıldığında eşitlik bozulmaz.

$$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

iii. Bir eşitliğin her iki yanını aynı sayıya bölündüğünde eşitlik bozulmaz.

$$a = b \Leftrightarrow a : c = b : c \quad (c \neq 0)$$

iv. Bir eşitlikte her iki yanın (reel) kuvveti alındığında eşitlik bozulmaz. ($n \in \mathbb{R}$)

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$$

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \quad (n > 1, n \in \mathbb{Z})$$

v. Reel sayılarda geçişme özeliği aşağıdaki gibidir.

$$a = b \text{ ve } b = c \Rightarrow a = c$$

vi. Reel sayılarla taraf tarafa toplama-çıkarma-çarpma-bölme işlemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \pm \\ \hline a \pm c = b \pm d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ \times \\ \hline a \cdot c = b \cdot d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a = b \\ c = d \\ : \\ \hline a : c = b : d \\ (c \neq 0, d \neq 0) \end{array}$$

BASİT EŞİTSİZLİKLER

4

● **EŞİTSİZLİK** : Reel sayıları "<" veya ">" sembolleriyle karşılaştırmaya *reel sayıların eşitsizliği* denir.

❑ Eşitsizliğin Özellikleri :

x, y, a, b herhangi dört reel sayı olmak üzere :

i. Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı sayı eklenip çıkarılabilir.

$$x < y \Rightarrow x \pm a < y \pm a$$

ii. Bir eşitsizliğin her iki yanını pozitif bir reel sayıyla çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirmez, negatif bir reel sayıyla çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.

$$\begin{array}{l} a \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } x < y \Rightarrow ax < ay \\ a \in \mathbb{R}^- \text{ ve } x < y \Rightarrow ax > ay \end{array}$$

iii. Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir. Ancak bu tip eşitsizliklerde çıkarma işlemi yapılamaz.

$$\begin{array}{r} \forall x, y, a, b \in \mathbb{R} \text{ için} \\ x < y \\ + \quad a < b \\ \hline x + a < y + b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \exists x, y, a, b \in \mathbb{R} \text{ için} \\ x < y \\ - \quad a < b \\ \hline x - a \not< y - b \end{array}$$

iv. x, y, a, b pozitif gerçek sayılar olmak üzere :

$$\begin{array}{r} x < y \\ a < b \\ \times \\ \hline x \cdot a < y \cdot b \end{array}$$

- v. 0 ile 1 arasındaki bir reel sayının pozitif tamsayı kuvvetleri arttıkça elde edilen sayıların değeri azalır.

$$x \in (0,1) \Rightarrow x > x^2 > x^3 > x^4 > \dots$$

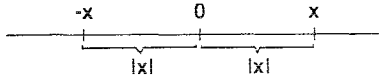
- vi. x ve y aynı işaretli reel sayılar olmak üzere :

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

- vii. x ve y zıt işaretli reel sayılar olmak üzere :

$$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

- **MUTLAK DEĞER** : Sayı ekseninde x reel sayısına karşılık gelen noktanın orijine olan uzaklığına x'in *mutlak değeri* denir. x'in mutlak değeri $|x|$ şeklinde gösterilir.



- **Mutlak Değerin Özellikleri :**

x, y, a, b birer reel sayı olmak üzere :

i. $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \sqrt[n]{x^{2n}} = |x| \text{ tir.}$

- ii. $|x|$, x'in *uzunluğu* demektir. Bu yüzden sıfırdan farklı tüm reel sayıların mutlak değerleri pozitifdir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

iii.

$$\begin{aligned} x < |x| &\Rightarrow x < 0 \\ x = |x| &\Rightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

- iv. Mutlak değerın bazı işlemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} |x| &= |-x| \\ |x-y| &= |y-x| \\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \\ |x:y| &= |x| : |y| \quad (y \neq 0) \end{aligned}$$

- v. $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere :

$$\begin{aligned} |x| \leq a &\Rightarrow -a \leq x \leq a \\ |x| \geq a &\Rightarrow x \leq -a \vee x \geq a \end{aligned}$$

- vi. Üçgen eşitsizliği :

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

- vii. $A = |x-a| + |x-b|$ 'nin *maksimum değeri* $x = a$ veya $x = b$ için alacağı değerdir.

$$\begin{aligned} x = a \text{ için } \max(A) &= |a-b| \\ x = b \text{ için } \max(A) &= |b-a| \end{aligned}$$

- viii. $B = |x-a| - |x-b|$ 'nin *minimum değeri* $x = a$ için, *maksimum değeri* ise $x = b$ için alacağı değerdir.

$$\begin{aligned} x = a \text{ için } \min(B) &= -|a-b| \\ x = b \text{ için } \max(B) &= |b-a| \end{aligned}$$

ÜSLÜ-KÖKLÜ İFADELER

5

● **ÜSLÜ İFADE** : $a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, n tane a 'nın çarpımı a^n dir. a^n ifadesindeki a 'ya taban, n 'ye kuvvet (üs) denir.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ tane}} = a^n$$

Üslü İfadelerde İşlemler :

- i. Sıfırdan farklı her reel sayının sıfırıncı kuvveti 1 dir. Sıfırın sıfırıncı kuvveti belirsizdir. (0^0 belirsiz.)

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

- ii. **Üssün üssü**: Üslü bir ifadenin tekrar üssü alınırsa üsler çarpılır.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left((a^m)^n \right)^p = a^{m \cdot n \cdot p}$$

NOT : $(a^m)^n \neq a^{(m^n)}$

- iii. **Negatif üs**: Bir reel sayının negatif kuvveti alındığında, o reel sayının pozitif kuvvetinin çarpmaya göre tersi elde edilir.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0)$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-m} = \left(\frac{b}{a} \right)^m \quad (a \neq 0, b \neq 0)$$

- iv. Pozitif sayıların tüm kuvvetleri pozitiftir.

Negatif sayıların ise; tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri pozitiftir.

$a > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere :

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$$

- v. **Üslü bir ifadenin 1'e eşitliği** :

$$a^n = 1 \Rightarrow a \neq 0 \wedge n = 0$$

$$\Rightarrow a = 1 \wedge n \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a = -1 \wedge n \text{ çiftsayı}$$

- vi. **Toplama - Çıkarma** : Toplama veya çıkarma işlemleri, tabanları ve üsleri aynı olan üslü ifadelerle uygulanır. Bu durumda ifade ortak çarpan parantezine alınır.

$$x \cdot a^m + y \cdot a^m - z \cdot a^m = a^m (x + y - z)$$

- vii. **Çarpma-Bölme** : Tabanları aynı ifadeler çarpılırken üsler toplanır, bölünürken üsler çıkarılır. Üsleri aynı ifadeler çarpılırken veya bölünürken ortak üs, ifadeye üs olarak yazılır.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

iv. **Üslü Denklemler** : Aşağıda verilen özellikler kullanılarak, herhangi bir üslü denklemin nasıl çözümleneceği anlaşılr.

$a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$ olmak üzere

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n \text{ olur.}$$

$$a^m = b^m \Rightarrow \begin{cases} a = b, & m \text{ tek ise} \\ a = \pm b, & m \text{ çift ise} \end{cases}$$

● **KÖKLÜ İFADE** : $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^n = a$ denkleminde elde edilen x 'e a 'nın n 'inci kuvvetten kökü denir.

$$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

□ **Köklü İfadelerde İşlemler** :

i. Her köklü ifade reel sayı belirtmez.

$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} n \text{ tek sayı} \\ n \text{ çift sayı ve } a \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R} \Rightarrow n \text{ çift sayı ve } a < 0$$

ii. **Rasyonel üs** :

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}, \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

Bu ifadede, $m = n$ durumunda

$$m \text{ tek ise } \sqrt[m]{a^m} = a \text{ olur.}$$

$$\sqrt[3]{2^3} = 2, \quad \sqrt[5]{(-3)^5} = -3$$

$$m \text{ çift ise } \sqrt[m]{a^m} = |a| \text{ olur.}$$

$$\sqrt[4]{2^4} = 2, \quad \sqrt[6]{(-3)^6} = 3$$

iii. **Rasyonel üssün sadeleştirilmesi veya genişletilmesi** :

$k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere ;

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[k \cdot m]{a^{k \cdot n}}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot k]{a^{n \cdot k}}$$

iv. **Kök içindeki bir ifadenin kök dışına çıkarılması** :

$$\sqrt[m]{a^{m \cdot p}} \cdot c = a^p \cdot \sqrt[m]{c}$$

$$a^p \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{a^{p \cdot m} \cdot c}$$

vi. İç içe kökler :

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m.n.p]{a}$
$\sqrt[m]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[p]{c} = \sqrt[m.n.p]{a^{n.p} . b^{p} . c}$
$\sqrt[m]{a^x} \sqrt[n]{a^y} \sqrt[p]{a^z} = \sqrt[m.n.p]{a^{(x.n+y).p+z}}$
$\sqrt[m]{a^{m-1}} \sqrt[n]{a^{n-1}} \sqrt[p]{a^{p-1}} = \sqrt[m.n.p]{a^{m.n.p-1}}$
$\underbrace{\sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \dots \sqrt{a}}_{n \text{ tane}} = a^{\frac{2^n - 1}{2^n}}$

v. Tam kare kuralı :

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

veya ;

$$\sqrt{m+n \pm 2\sqrt{mn}} = \sqrt{m} \pm \sqrt{n} \quad (m > n)$$

vii. Sonsuz kökler :

$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \dots = \sqrt[n-1]{a}$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{a} : \dots = \sqrt[n+1]{a}$
$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{\sqrt{4a+1} + 1}{2}$
$\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} = \frac{\sqrt{4a+1} - 1}{2}$
$\sqrt{(a+1).a + \sqrt{(a+1).a + \sqrt{(a+1).a + \dots}}} = a+1$
$\sqrt{(a+1).a - \sqrt{(a+1).a - \sqrt{(a+1).a - \dots}}} = a$

viii. Paydayı rasyonel sayı yapmak : Bölüm şeklindeki köklü bir ifadede paydayı irrasyonellikten kurtarmaya, paydayı rasyonel yapmak denir.

□ **EŞLENİK** : p ve q irrasyonel sayılar ve p,q rasyonel bir sayı ise p ile q sayıları birbirinin eşleniğidir .

Bazı irrasyonel sayılar ve eşlenikleri tabloda verilmiştir.

p	q	p.q
$\sqrt[m]{a^n}$	$\sqrt[m]{a^{m-n}}$	a
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	a - b
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	a - b
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	a + b

- Paydayı rasyonel yapmak için pay ve payda paydanın eşleniği ile çarpılır.

ÖRNEK :

Bazı ifadelerin paydaları aşağıdaki gibi rasyonel hale getirilebilir.

$$1) \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} \\ = 2\sqrt{3}$$

$$2) \frac{10}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{10\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} \\ = \frac{10 \cdot \sqrt[5]{8}}{2} \\ = 5\sqrt[5]{8}$$

$$3) \frac{2}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} \cdot \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} \\ = \frac{2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} \\ = \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$4) \frac{1}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} \\ = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$$

ÇARPANLARA AYIRMA**6**

● **ÇARPANLARA AYIRMA** : Bir polinomu asal polinomların çarpımı olarak yazmaya, *bu polinomu çarpanlara ayırma* denir.

- **Asal polinom** : Bir polinomun sabit sayıdan farklı bir çarpanı yoksa bu polinoma *asal polinom* adı verilir. $2x$ veya $3(x-y)$ gibi.

□ **Çarpanlara Ayırma Kuralları** :

i. **İki terimliler** : $x^n \pm y^n$

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$
$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
$x^8 - y^8 = (x - y)(x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7)$
$x^8 + y^8$ ifadesi çarpanlara ayrılmaz.

SONUÇ :

$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$
n tek ise,
$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$

ii. **Üç terimliler** : $ax^{2n} + bx^n + c$ şeklindeki ifadelere *üç terimli* denir. Üç terimlileri çarpanlara ayırma işlemi aşağıda gösterilmiştir:

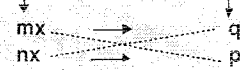
$$a = 1 \text{ için, } x^2 + (m+n)x + m \cdot n = (x+m)(x+n)$$

$$x^2 - (m+n)x + m \cdot n = (x-m)(x-n)$$

$$x^2 + (m-n)x - m \cdot n = (x+m)(x-n)$$

$a \neq 1$ için,

$$m \cdot nx^2 + (mp + nq)x + p \cdot q = (mx + q)(nx + p)$$



iii. Tam kare ifadeler :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Not: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$
 $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

iv. Aritmetik üçgen ve $(a \pm b)^n$ 'in açılımı :

$$\begin{array}{l} 1 \dots\dots\dots (a+b)^0 \\ 1 \quad 1 \dots\dots\dots (a+b)^1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \dots\dots\dots (a+b)^2 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \dots\dots\dots (a+b)^3 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \dots\dots\dots (a+b)^4 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \dots\dots\dots (a+b)^5 \end{array}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

v. Çok terimliler ve ortak çarpan parantezine almak:

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by &= a(x+y) + b(x+y) \\ &= (a+b)(x+y) \end{aligned}$$

vi. Terim ekleyip çıkarma yöntemi : Verilen ifadeye bazı terimler eklenip çıkarılarak, bilinen kurallara benzetmeler yapılır. Örneğin,

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2$$

$$= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 \text{ (tam kareye benzetildi)}$$

$$= (x^2 + 1)^2 - x^2 \text{ (iki kare farkı oluştu.)}$$

$$= (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + x^2 - x - x^2 - x$$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - x^2 - x \text{ (tam küp)}$$

$$= (x+1)^3 - x(x+1)$$

$$= (x+1) [(x+1)^2 - x] \text{ (ortak çarpan parantezi)}$$

$$= (x+1)(x^2 + 2x + 1 - x)$$

$$= (x+1)(x^2 + x + 1)$$

● ÖZDEŞLİK : $P(x) = Q(x)$ eşitliği $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$P(x,y) = Q(x,y)$ eşitliği $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa P ile Q özdeşdir denir.

□ Bazı önemli özdeşlikler :

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

ORAN ve ORANTI

7

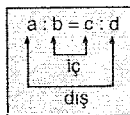
● **ORAN** : a ve b reel sayılarının en az biri sıfırdan farklı olmak şartıyla a/b 'ye, a'nın b'ye *oranı* denir.

● **ORANTI** : a/b ve c/d gibi iki oranın eşitliğini ifade eden önermeye, yani $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliğine, *orantı* denir.

□ **Orantının Özellikleri :**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \text{orantısı için}$$

i. b ve c'ye *içler*, a ve d'ye *dışlar* denir.



ii. $a.d = b.c$ (içler dışlar çarpımı)

iii. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (içler yer değiştirebilir.)

iv. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (dışlar yer değiştirebilir)

v. $\frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd}$ ($m, n \neq 0$) (oranlar genişletilebilir)

vi. $\frac{a : m}{b : m} = \frac{c : n}{d : n}$ ($m, n \neq 0$) (oranlar sadeleştirilebilir)

vii. $\frac{ma \pm nc}{mb \pm nd} = k$ ($m, n \neq 0$)

viii. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ve $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

ix. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (viii' deki eşitlikler taraf tarafa bölünerek elde edilmiştir.)

MATEMATİK FORMÜLLERİ

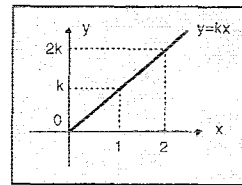
$$x. \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = k^2 \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = k^2$$

$$xi. \frac{a.c}{b.d} = k^2$$

● **DOĞRU ORANTI** : Orantılı iki ifadeden biri artarken diğeri de artıyor, biri azalırken diğeri de azalıyorsa bu iki ifade *doğru orantılıdır* denir.

□ y ile x doğru orantılı ise, $\frac{y}{x} = k$ ($k \in \mathbb{R}^+$) dir.

Buradan, $y = kx$ doğru orantı denklemidir.



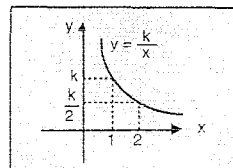
Doğru orantılı y ile x'in grafiğidir.

□ Hız ile yol, iş ile işçi, iş ile zaman doğru orantılı çokluklardır.

● **TERS ORANTI** : Orantılı iki ifadeden biri artarken diğeri azalıyor, biri azalırken diğeri artıyorsa bu iki ifade *ters orantılıdır* denir.

□ y ile x ters orantılı ise $y.x = k$ ($k \in \mathbb{R}^+$) dir.

Buradan, $y = \frac{k}{x}$ ters orantı denklemidir.



Ters orantılı y ile x'in grafiğidir.

□ Hız ile zaman, işçi ile zaman ters orantılı çokluklardır.

● ARİTMETİK ORTA :

$$\text{İki sayının aritmetik ortası : } A = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\text{Üç sayının aritmetik ortası : } A = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$n \text{ sayının aritm. ort. : } A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

● GEOMETRİK ORTA :

$$\text{İki sayının geo. ortası : } G = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

$$\text{Üç sayının geo. ortası : } G = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$$

$$n \text{ sayının geo. ortası : } G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$$

● HARMONİK ORTA :

$$\text{İki sayının harmonik ortası :}$$

$$H = \left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \frac{1}{2} \right]^{-1} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\text{Üç sayının harmonik ortası :}$$

$$H = \left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) \frac{1}{3} \right]^{-1} = \frac{3x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}$$

$$n \text{ sayının harmonik ortası :}$$

$$H = \left[\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \frac{1}{n} \right]^{-1}$$

● ARİTMETİK - GEOMETRİK - HARMONİK ORTA İLİŞKİSİ :

İki sayının aritmetik, geometrik ve harmonik ortası arasında

$$G^2 = A \cdot H \text{ ve } A \geq G \geq H \text{ bağıntıları sağlanır.}$$

● ORTA ORANTILI :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad (a : b = c : x) \text{ orantısından elde edilen}$$

$$x = \sqrt{ab}$$

sayısına a ile b'nin *orta orantılı* veya *geometrik ortası* denir.

● DÖRDÜNCÜ ORANTILI :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad (a : b = c : x) \text{ orantısından elde edilen}$$

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

sayısına a, b ve c'nin (sırayla) *dördüncü orantılı* denir.

I. DERECEDEDEN DENK.

8

● BİRİNCİ DERECEDEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER : $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere:

$ax + b = 0$ eşitliğine *birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem* denir. Bu eşitlikteki x 'e *bilinmeyen*, a ve b 'ye de *katsayı* adı verilir.

□ Çözüm kümesinin bulunuşu :

$ax + b = 0$ ifadesinde :

i. $a \neq 0$ için $ax + b = 0$

$$x = -\frac{b}{a}, \quad \mathbb{C} : \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

ii. $a = 0 \wedge b = 0$ için $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{C} : (-\infty, +\infty)$$

iii. $a = 0 \wedge b \neq 0$ için $x \notin \mathbb{R}$

$$\mathbb{C} : \emptyset$$

● BİRİNCİ DERECEDEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER : $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, b \neq 0$ olmak

üzere: $ax + by = c$ şeklindeki eşitliklere *birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem* denir.

$$\square a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

şeklindeki birden çok denkleme, *birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi* denir.

□ Çözüm kümesinin bulunuşu :

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{..... (I)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{..... (II)} \end{array} \right\} \text{Denklemler sisteminde ;}$$

i. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

ii. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ise sistemin çözümü yoktur.

iii. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise sistemin tek çözümü vardır.

Çözüm aşağıdaki yöntemlerle yapılır.

□ Yerine koyma metodu :

1. (I) ve (II) den y 'ler çekilir.

2. y 'ler eşitlenir. Bu durumda x bulunur.

3. Bulunan x değeri (I) veya (II) de yerine yazılarak y bulunur.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I) den } y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \\ \text{(II) den } y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{array} \right\} \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

□ Yok etme metodu :

1. x veya y 'den birinin katsayıları eşitlenir.

2. Taraf tarafa çıkarma işlemiyle katsayıları eşitlenen bilinmeyenler yok edilir.

3. Diğer bilinmeyen çekilir, (I) veya (II) de yerine yazılarak yok edilen bilinmeyen de bulunur.

$$\begin{array}{r} b_2 (a_1 x + b_1 y = c_1) \\ b_1 (a_2 x + b_2 y = c_2) \\ \hline a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1 \\ \pm a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = \pm b_1 c_2 \end{array}$$

$$\boxed{x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}} \\ \boxed{y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}$$

❑ Katsayılar Determinantı Metodu :

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array} \right\} \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ veya} \\ \Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \Delta \neq 0}$$

$\Delta = 0$ ise denklem sisteminin çözümü yoktur.

● BİRİNCİ DERECEDE ÜÇ BİLİNMEYENLİ

DENKLEMLER : $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ olmak üzere $ax + by + cz = d$ şeklindeki eşitliklere *birinci dereceden üç bilinmeyenli denklem* denir. Bu denklemdeki x, y ve z 'ye *bilinmeyen*, a, b, c ve d 'ye *katsayı* adı verilir.

$$\square a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \dots\dots\dots (I)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \dots\dots\dots (II)$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \dots\dots\dots (III)$$

şeklindeki birden çok denkleme, *birinci dereceden üç bilinmeyenli denklem sistemi* denir.

● ÇÖZÜM KÜMESİNİN BULUNUŞU :

❑ *Yok etme metodu :* x, y ve z 'den herhangi biri yok edilir. z 'nin bulunmasıyla oluşan iki bilinmeyenli denklem çözülerek x ve y elde edilir.

❑ *Katsayılar Determinantı Metodu :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} c_1$$

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \Delta \neq 0}$$

DENKLEM KURMA

9

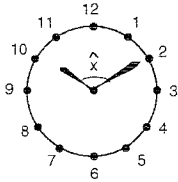
- **MATEMATİK DİLİNE ÇEVİRME** : Verilen problemin x , a , p , n , ... gibi sembollerle ifade edilmesine, problemin *matematik dilinde yazılması* denir.

● **YAŞ PROBLEMLERİ** :

- İki kişi arasındaki yaş farkı zamanla değişmez.
- İki kişinin yaşları toplamı t yıl sonra $2t$ artar.
- Üç kişinin yaşları toplamı t yıl önce $3t$ daha azdır.

● **SAAT PROBLEMLERİ** :

Herhangi bir vakitte akrep ile yelkovan arasındaki açı aşağıdaki pratik formül yardımıyla bulunabilir.



$$\hat{x} = \frac{11d - 60s}{2}$$

d : dakika

s : saat

x : akrep ile yelkovan arasındaki açı

- Saat yüzeyi 12 eşit parçaya ayrılmıştır.
- Her parça 5 bölmeden oluşur.
- Saat yüzeyi $5 \cdot 12 = 60$ eşit bölmeye ayrılmıştır. Bu bölmelerin herbiri 1 dakikaya karşılık gelir.
- Bir dakika, merkezden $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ lik açıyla görülür.
- Yelkovan 60 dakika ilerlediğinde akrep 5 bölme ilerler.
- Akrep 1 bölme ilerlediğinde yelkovan $\frac{60}{5} = 12$ dakika ilerler.

● **HAREKET PROBLEMLERİ** :

- s : Yol, v : Hız, t : Zaman olmak üzere :

$$s = v \cdot t, v = \frac{s}{t}, t = \frac{s}{v}$$

- Hız ile yol (zamana göre) doğru orantılı, hız ile zaman (yola göre) ters orantılıdır.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} \quad \text{ve} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

- Ortalama hız v_o ise,

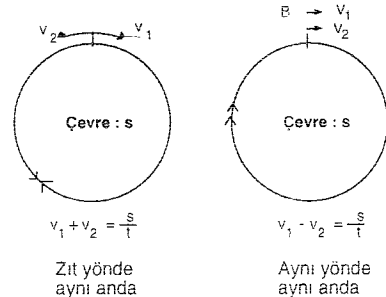
$$v_o = \frac{\text{TOPLAM YOL}}{\text{TOPLAM ZAMAN}}$$

- Bir hareketli bir yolu v_1 hızıyla gidiyor. v_2 hızıyla dönüyorsa,

$$v_o = \frac{2 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$$

$$\text{Ortalama hız} \neq \frac{v_1 + v_2}{2}$$

- İki hareketlinin çember etrafındaki hareketlerini aşağıdaki şekillerden inceleyiniz.



● İŞÇİ-HAVUZ PROBLEMLERİ :

- ❑ Birim zamanda yapılan iş veya dolan havuz üzerinden işlem yapılır.
- ❑ Bir işin tamamı (işçi sayısı sabit tutularak.) a saatte bitiyorsa, 1 saatte bu işin $\frac{1}{a}$ 'sı biter. (Havuz problemleri için de benzer bir mantık kullanılır.)
- ❑ Bir işin tamamını I. işçi a, II. işçi b saatte, ikisi birlikte x saatte bitirebiliyorlarsa

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \text{ tir.}$$

- ❑ Dolduran musluk için (+), boşaltan musluk için ise (-) işareti kullanılır.

● FAİZ PROBLEMLERİ :

$$F = \frac{A \cdot n \cdot t}{100}$$

F : faiz
A : anapara
n : faiz oranı
t : süre

● KARIŞIM PROBLEMLERİ :

$$\text{Karışım Oranı} = \frac{\text{Saf Madde Miktarı}}{\text{Toplam Ağırlık}}$$

Bana çözmem için bir soru tevdi edilse, bir saatlik süre tanınsa; sürenin 45 dakikasını soruyu anlamaya, 10 dakikasını çözüm yolu geliştirmeye ve 5 dakikasını da soruyu çözmeye ayırıyorum.

ALBERT EINSTEIN

KARTEZYEN ÇARPIMI ve BAĞINTI

10

- **SIRALI "n" li** : n tane nesnenin belli bir öncelik sırasına göre düzenlenip, tek bir nesne gibi düşünülmesiyle elde edilen yeni nesneye *sıralı n'li* denir.

(a,b) : Sıralı ikilisinde a : 1. bileşen, b : 2. bileşen
(a,b,c,d) Sıralı dörtlüsünde a:1.bileşen, b : 2. bileşen
c : 3. bileşen, d : 4. bileşen

$$\square a \neq b \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$$

$$\square (a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c \wedge b = d$$

- **KARTEZYEN ÇARPIM** : A ve B herhangi iki küme olmak üzere, birinci bileşeni A'dan ikinci bileşeni B'den alınarak oluşturulan tüm sıralı ikiliilerin kümesine A ile B'nin kartezyen çarpımı denir.

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

- ❑ *Kartezyen çarpımının özellikleri :*

$$i. \quad A \times B \neq B \times A \quad (A \neq B \neq \emptyset)$$

$$ii. \quad A \times \emptyset = \emptyset$$

$$iii. \quad A \times A = A^2$$

$$iv. \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$v. \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$vi. \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$vii. \quad (A \times B) \times C = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in A \times B, z \in C\}$$

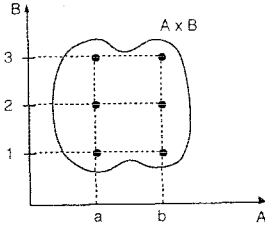
$$viii. \quad s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$$

ÖRNEK:

$$A = \{a, b\}$$

$B = \{1, 2, 3\}$ kümeleri için

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \text{ tür.}$$



● **BAĞINTI** : $A \times B$ 'nin her bir alt kümesine A 'dan B 'ye bir *bağlıntı*. $A \times A$ 'nın her bir alt kümesine de A 'da bir *bağlıntı* denir.

$$\beta = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\}$$

□ **Bağlıntı sayısı :**

$$s(A) = m \text{ ve } s(B) = n \text{ ise}$$

$$s(A \times B) = m \cdot n$$

$$s(A \times A) = m^2 \text{ olur. O halde,}$$

$$A \text{'dan } B \text{'ye bağliantı sayısı : } 2^{m \cdot n}$$

$$A \text{'dan } A \text{'ya bağliantı sayısı : } 2^{m^2}$$

□ **A 'dan B 'ye r elemanlı bağliantı sayısı :**

$$C(m, n, r) = \frac{P(m \cdot n, r)}{r!}$$

□ **Bağliantının Tersi :**

$$\beta = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\} \text{ bağliantisinin tersi :}$$

$$\beta^{-1} = \{(y, x) \mid (y, x) \in B \times A\}$$

□ **Bağliantı Çeşitleri :** β , A 'da bir bağliantı olsun.

i. **Yansıyan Bağliantı** : $\forall x \in A$ için $(x, x) \in \beta$

ii. **Simetrik Bağliantı** : $\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$

iii. **Ters simetrik Bağliantı** : $x \neq y$, $\forall (x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$

iv. **Geçişgen bağliantı** : $\forall (x, y) \in \beta$ ve $\forall (y, z) \in \beta$ için $(x, z) \in \beta$

□ **Denklik Bağliantısı :** β , A 'da bir bağliantı olsun .

β bağliantısı :

**YANSIMA
SİMETRİ
GEÇİŞME**

özelliklerini sağlıyorsa, bu bağliantıya *denklik bağliantısı* denir.

□ **Sıralama Bağliantısı :** β , A 'da bir bağliantı olsun.

β bağliantısı :

**YANSIMA
TERS SİMETRİ
GEÇİŞME**

özelliklerini sağlıyorsa, bu bağliantıya *sıralama bağliantısı* denir.

□ **A 'da yansıyan bağliantı sayısı :**

$$s(A) = m \text{ ise}$$

$$\text{yansıyan bağliantı sayısı : } 2^{m^2 - m}$$

□ **A 'da simetrik bağliantı sayısı :**

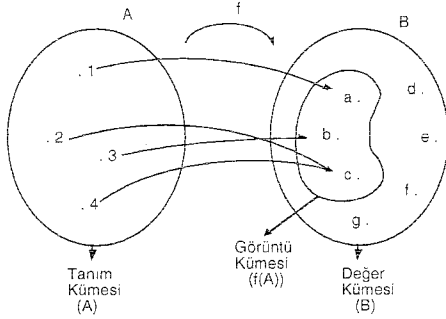
$$s(A) = m \text{ ise,}$$

$$\text{simetrik bağliantı sayısı : } 2^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

□ **Birim Bağliantı :**

$$\forall x \in A \text{ için}$$

$$\beta = \{(x, x) \mid x \in A\} \text{ bağliantisine } A \text{'da birim bağliantı denir.}$$



● **FONKSİYON** : Tanım kümesinin her elemanını, değer kümesinde yalnız bir elemana eşleyen bağıntıya fonksiyon denir.

Her fonksiyon bir bağıntıdır. Fakat her bağıntı bir fonksiyon değildir.

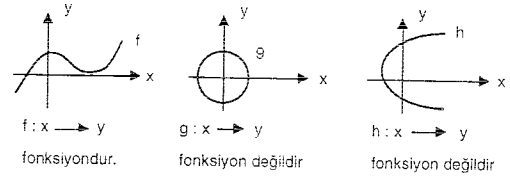
A : Tanım Kümesi
B : Değer Kümesi
f(A) : Görüntü Kümesi

A'nın her elemanı f(A)'da görüntülenir.

● $f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon ise :

- A'da açıkta eleman kalmaz.
- A'nın bir elemanı B'de birden çok değer alamaz.

1. $\forall x \in A \Rightarrow \exists y \in B$ ve $(x, y) \in f$
2. $(x, y_1) \in f$ ve $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$



NOT : (x, y) dik koordinat düzleminde verilen bir eğrinin x'ten y'ye bir fonksiyon olup olmadığını anlamak için x eksenine dik doğrular çizilir. Çizilen bu doğrular eğriyi birden çok noktada kesiyorsa o eğri x'ten y'ye bir fonksiyon belirtmez.

● FONKSİYON SAYISI :

$s(A)$: A'nın eleman sayısı

$s(B)$: B'nin eleman sayısı olmak üzere :

A'dan B'ye tanımlanacak *fonksiyon sayısı* :

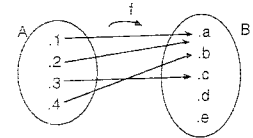
$$s(f) = s(B)^{s(A)}$$

● FONKSİYON ÇEŞİTLERİ :

$f: A \rightarrow B$, $x \mapsto y$ fonksiyonu verilsin.

i. **İçine Fonksiyon** : Değer kümesinde en az bir tane, tanım küresinin hiçbir elemanı ile eşleşmemiş elemanlar bulunan fonksiyona *içine fonksiyon* denir.

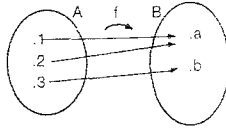
$$f(A) \neq B$$



□ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $f(x)=x+3$ içinedir. Çünkü değer kümesinin elemanlarından olan 0,1,2 tanım kümesinin hiçbir elemanı ile eşleşemez.

ii. **Örten Fonksiyon** : Değer kümesinde tanım kümesinin elemanlarıyla eşlenmemiş elemanı bulunmayan fonksiyona *örten fonksiyon* denir.

$$f(A) = B$$



□ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 3$ fonksiyonu örterdir. Çünkü değer kümesinin bütün elemanları tanım kümesinin elemanlarıyla eşlenebilir.

iii. **Bire-bir Fonksiyon** : Bir fonksiyonda farklı elemanların görüntüleri de farklıysa *fonksiyon birebirdir* (1-1) denir.

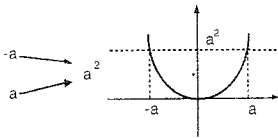
$$1^\circ. x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ veya}$$

$$2^\circ. f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

□ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x + 3$ 1-1 dir.

□ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ 1-1 değildir.

Çünkü, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, a ve $-a$ 'nın görüntüleri aynıdır.



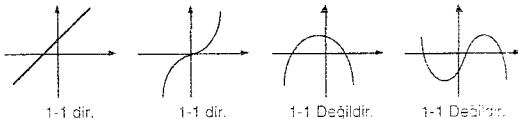
$$-a \neq a, f(-a) = f(a) = a^2$$

Grafikten, $f(x) = x^2$ nin

1-1 olmadığı görülmektedir.

NOT:

(x, y) dik koordinat düzleminde verilen bir eğrinin x 'den y 'ye 1-1 fonksiyon olup olmadığını anlamak için x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen paraleller eğriyi birden çok noktada kesiyorsa, fonksiyon 1-1 değildir.



iv. **Birebir-İçine Fonksiyon** : Değer kümesinde, tanım kümesi ile eşlenmemiş elemanı bulunan birebir fonksiyona *1-1 içine fonksiyon* denir.

□ $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu 1-1 ve içine ise

$$s(B) > s(A) \text{ dir.}$$

□ $s(A) = n$, $s(B) = r$ ve $n > r$ olmak üzere

A'dan B'ye tanımlanacak 1-1 içine fonksiyonların sayısı

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ dir.}$$

v. **Birebir-Örten Fonksiyon** : Değer kümesinde tanım kümesiyle eşlenmemiş elemanı olmayan birebir fonksiyona *1-1 örten fonksiyon* denir.

□ $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu 1-1 ve örten ise

$$s(A) = s(B) \text{ dir.}$$

□ $s(A) = s(B) = n$

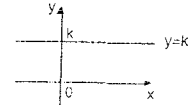
A'dan B'ye tanımlanacak 1-1 örten fonksiyonların sayısı

$$P(n, n) = n! \text{ dir.}$$

vi. **Sabit Fonksiyon** : Tanım kümesinin her elemanını değer kümesinde bir tek elemana eşleyen fonksiyona *sabit fonksiyon* denir.

$f: A \rightarrow B$, $\forall x \in A$ ve $k \in B$ için

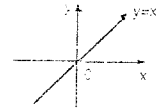
$$f(x) = k, \quad k \in B$$



vii. **Birim Fonksiyon** : Tanım kümesinin her elemanını değer kümesinde kendisine eşleyen fonksiyona *birim (özdeş) fonksiyon* denir. Genellikle I ile gösterilir.

$f: A \rightarrow B$ birim fonksiyon ise

$$f(x) = x \text{ veya } I(x) = x \text{ tir.}$$



viii. Çift ve Tek Fonksiyon

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ için :}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(-x) = f(x) \text{ ise } f, \text{ çift fonksiyon} \\ f(-x) = -f(x) \text{ ise } f, \text{ tek fonksiyondur.} \end{array}}$$

Bir $f(x)$ fonksiyonunun tek veya çift olduğunu anlamak için x 'lerin yerine $(-x)$ yazılır. Eğer fonksiyonda bir değişiklik olmamışsa fonksiyon çifttir. Fonksiyonun her terimi $(-)$ ile çarpılmış hale gelmişse fonksiyon tektir.

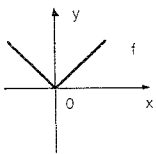
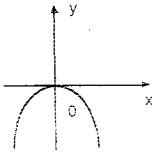
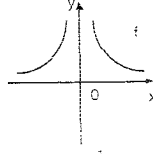
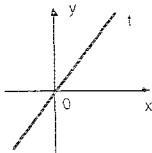
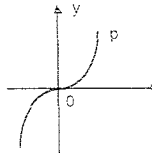
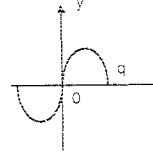
$$\square f(x) = x^4 + 3x^2 + 4 \text{ fonksiyonu için}$$

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 + 4 = x^4 + 3x^2 + 4 \text{ olup } f \text{ çift fonksiyondur.}$$

$$\square f(x) = 2x^3 - 5x \text{ fonksiyonu için}$$

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x) = -2x^3 + 5x \text{ olup } f \text{ tek fonksiyondur.}$$

NOT : Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetrik, tek fonksiyonların grafikleri ise orijine göre simetrik.


 $f(x) = |x|$: çift

 $g(x) = -x^2$: çift

 $h(x) = \frac{1}{x}$: çift

 $t(x) = x$: tek

 $p(x) = x^3$: tek

 $q(x) = \text{Sin } x$: tek

ix. **Permütasyon Fonksiyonu** : Tanım kümesinin her elemanını yine tanım kümesindeki elemanlara eşleyen 1-1 ve örten fonksiyona permütasyon fonksiyonu denir.

$$\square A = \{a, b, c, d\} \text{ için :}$$

$$f: A \rightarrow A, f(a)=b, f(b)=d, f(c)=c, f(d)=a \text{ ise}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

$\square$ **Birim permütasyon fonksiyonu** : Tanım kümesinin her elemanını yine aynı elemana götüren permütasyon fonksiyonuna birim permütasyon fonksiyonu denir.

$$I = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

x. **Ters Fonksiyon** : $f: A \rightarrow B$, 1-1 ve örten fonksiyon olmak üzere $f^{-1}: B \rightarrow A$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tersi denir.

$$\boxed{f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$$

$\square$ 1-1 ve örten olmayan fonksiyonların tersi fonksiyon değildir.

$\square$ $s(A)=s(B)=n$ olmak üzere :

A'dan B'ye $n!$ tane tersi olan fonksiyon tanımlanır.

A'dan B'ye tersi olmayan fonksiyon sayısı ise $2^{n^2} - n!$ dir.

$\square$ **Bazı Fonksiyonların Tersleri :**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax+b \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$f: \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

a ile d işaret ve yer değiştirmiştir.

Örneğin,

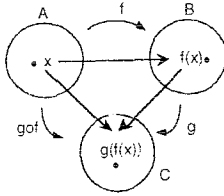
$$A = \{1, 2, 3, 4\}, f: A \rightarrow A$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

❑ Bileşke Fonksiyon :

$f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ olmak üzere, $\text{gof}: A \rightarrow C$ fonksiyonuna f ile g 'nin bileşke fonksiyonu denir.

$$\text{gof}(x) = g[f(x)] \text{ tir.}$$



BİLEŞKE FONKSİYONUN ÖZELLİKLERİ :

❑ Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur.

❑ Birleşme özelliği vardır.

$$\text{fo}(\text{goh})(x) = (\text{fog})h(x)$$

$$\text{fo}f(x) = f(x) = \text{fo}f(x)$$

$$\text{fo}f^{-1}(x) = f(x) = f^{-1} \circ f(x)$$

$$\text{fog}(x) = h(x) \Rightarrow g(x) = f^{-1} \circ h(x)$$

$$\text{fog}(x) = h(x) \Rightarrow f(x) = \text{fog}^{-1}(x)$$

$$\text{fo}(f^{-1} \circ g)(x) = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f(x)$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ için}$$

$$\text{fog} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } \text{gof} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

İŞLEM-MATEMATİK SİSTEM- MODÜLER ARİTMETİK

12

● **İŞLEM** : $A \neq \emptyset$, $A \times A$ 'dan A 'ya tanımlanan her fonksiyona A 'da tanımlı işlem denir. $\circ$, Δ , $\square$, $\star$, gibi sembollerle gösterilir.

$$\left. \begin{array}{l} A' \text{ da bir bağıntı } \beta, \\ \beta' \text{ nin bir fonksiyonu } f, \\ f' \text{ de bir işlem "}\Delta\text{"} \end{array} \right\} \begin{array}{l} f: (A \times A) \rightarrow A \\ (x, y) \rightarrow a, \\ x \Delta y \in A \text{ dir.} \end{array}$$

❑ İşlemin Özellikleri :

$A \neq \emptyset$, $\forall x, y \in A$, " Δ " ve " $\star$ " A da iki işlem olmak üzere :

i. $x \Delta y \in A$ ise A kümesi " Δ " işlemine göre *kapalıdır*.

ii. $x \Delta y = y \Delta x$ ise " Δ " in *değişme özelliği* vardır.

iii. $(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$ ise " Δ " in *birleşme özelliği* vardır.

iv. $x \Delta (y \star z) = (x \Delta y) \star (x \Delta z)$ ise " Δ " in " $\star$ " üzerine *soldan dağılım özelliği* vardır.

v. $(x \star y) \Delta z = (x \Delta z) \star (y \Delta z)$ ise " Δ " nin " $\star$ " üzerine *sağdan dağılım özelliği* vardır.

vi. $x \Delta e = x = e \Delta x$ eşitliklerini sağlayan $e \in A$ sayısına işlemin *birim (etkisiz) elemanı* denir.

* Bir kümenin, belli bir işlem için tanımlanan etkisiz elemanı (varsa), *tektir*.

vii. $x \Delta x^{-1} = e = x^{-1} \Delta x$ eşitliklerini sağlayan $x^{-1} \in A$ sayısına x in " Δ " işlemine göre *tersi* denir.

ix. $x \Delta y = y \Delta x = x$ eşitliklerini sağlayan x 'e " Δ " işleminin *yutan elemanı* denir.

■ Bir işlemin tablosu :

A kümesi sonlu sayıda elemana sahip ise Δ işleminin bazı özellikleri tablo yapılarak görülebilir.

ÖRNEK :

$A = \{B, U, R, S, A\}$ kümesinde tanımlı Δ işlemi aşağıdaki gibi olsun.

Δ	B	U	R	S	A
B	R	S	A	B	U
U	S	A	B	U	R
R	A	B	U	R	S
S	B	U	R	S	A
A	U	R	S	A	B

Ana satır
Ana satırın özdeşi
Esas köşegen
Ana sütun
Ana sütunun özdeşi

- (I) A kümesi " Δ " işlemine göre kapalıdır. $\forall x, y \in A, x \Delta y \in A$
 (II) " Δ " işleminin değişme özeliği vardır. (Esas köşegenine göre simetriktr.) $\forall x, y \in A$ ve $x \Delta y = y \Delta x$
 (III) Birim eleman $e = S$ dir. (e, ana satır ve sütunların özdeşlerinin kesiştiği elemandır.)
 (IV) $B^{-1} = U, U^{-1} = B, R^{-1} = A, S^{-1} = S, A^{-1} = R$

● MODÜLER ARİTMETİK :

$\beta = \{(x, y) : m \mid x - y, m > 1\}$ bağıntısı Z 'de bir *denklik bağıntısı*dır. Bu,

$x \equiv y \pmod{m}$ şeklinde gösterilir.

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{m} &\Rightarrow m \mid x - y \\ &\Rightarrow x - y = m \cdot t \quad (t \in Z) \\ &\Rightarrow x = m \cdot t + y \end{aligned}$$

O halde $x \equiv y \pmod{m}$ denkliği. x 'in m ile bölümünden kalan y dir anlamına gelir.

Z/m kümesi $m \in Z^+ - \{1\}$ olmak şartıyla, tamsayılar kümesindeki elemanların m ile bölümünden kalanların oluşturduğu kümedir. Z/m 'e m 'nin denklik sınıfları kümesi denir.

■ Z/m 'nin denklik sınıfları kümesi :

$$Z/m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{m-1}\} \text{ olur.}$$

■ Örneğin, tamsayılar kümesindeki elemanları 4 ile böldüğümüzde kalanlar $0, 1, 2, 3$ 'tür.

O halde $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ tür.

Z_4 'te $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ 'ün denklik sınıfları kümesi :

$$\bar{0} = \{\dots -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{\dots -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{\dots -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$\bar{3} = \{\dots -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$$

■ Bazı Denklik Sınıfları :

$$\text{mod } 2 \text{ 'de } Z/2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

$$\text{mod } 3 \text{ 'te } Z/3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$$

$$\text{mod } 4 \text{ 'te } Z/4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

$$\text{mod } 5 \text{ 'te } Z/5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

$$\text{mod } 6 \text{ 'da } Z/6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$\text{mod } 7 \text{ 'de } Z/7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$$

$$\text{mod } 8 \text{ 'de } Z/8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$$

$$\text{mod } 9 \text{ 'da } Z/9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$$

$$\text{mod } 10 \text{ 'da } Z/10 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}\}$$

● MODÜLER ARİTMETİKTE TEMEL

ÖZELİKLER :

$$x \equiv a \pmod{m}$$

$$y \equiv b \pmod{m} \quad \text{olmak üzere;}$$

$$i. \quad x \pm y \equiv a \pm b \pmod{m}$$

$$ii. \quad x \cdot y \equiv a \cdot b \pmod{m}$$

$$iii. \quad c \cdot x \equiv c \cdot a \pmod{m} \quad (c \in \mathbb{Z})$$

$$iv. \quad x^n \equiv a^n \pmod{m} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$v. \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{ve } k \text{ sayısı } x, a \text{ ve } m \text{ nin bir ortak böleni olmak}$$

$$\text{üzere } \frac{x}{k} \equiv \frac{a}{k} \pmod{\frac{m}{k}}$$

● Z/m 'de TOPLAMA ve ÇARPMA :

$$\forall x, y \in Z/m \text{ için :}$$

$$i. \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$$

$$ii. \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

● MATEMATİK SİSTEM : Bir küme üzerinde tanımlanan bir ya da daha fazla işleme *matematik sistem* denir.

Örneğin;

$(\mathbb{R}, +)$: Reel sayılar kümesinde tanımlı toplama işlemi

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: Tamsayılar kümesinde tanımlı toplama ve çarpma işlemi

□ **Grup** : $A \neq \emptyset$, A kümesi üzerinde " $\star$ " işlemi tanımlanmış olsun. $(A, \star)$ matematik sistemi bir grup ise :

- 1- A kümesi " $\star$ " işlemine göre kapalıdır.
- 2- " $\star$ " işleminin birleşme özelliği vardır.
- 3- " $\star$ " işleminin etkisiz elemanı vardır.
- 4- " $\star$ " işleminde her elemanın tersi vardır.

" $\star$ " işleminin değişme özelliği de varsa, $(A, \star)$ işlemine *değişmeli grup* denir.

□ **Halka** : $A \neq \emptyset$, A kümesi üzerinde " $\star$ " ve " $\circ$ " işlemleri tanımlanmış olsun. $(A, \star, \circ)$ matematik sistemi bir halka ise :

1. $(A, \star)$ sistemi değişmeli bir gruptur.
2. A kümesi " $\circ$ " işlemine göre kapalıdır.
3. " $\circ$ " işleminin birleşme özelliği vardır.
4. " $\circ$ " işleminin " $\star$ " işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır.

" $\circ$ " işleminin değişme özelliği de varsa $(A, \star, \circ)$ matematik sistemine *değişmeli halka*, birim eleman varsa *birim halka* adı verilir.

□ **Cisim** : $A \neq \emptyset$, A kümesi üzerinde " $\star$ " ve " $\circ$ " işlemleri tanımlanmış olsun. $(A, \star, \circ)$ matematik sistemi cisim ise :

1. $(A, \star)$ sistemi değişmeli bir gruptur.
2. A kümesinin " $\star$ " işlemine göre etkisiz elemanı " e " olmak üzere $(A - \{e\}, \circ)$ sistemi bir gruptur.
3. " $\circ$ " işleminin " $\star$ " işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

" $\circ$ " işleminin değişme özelliği de varsa $(A, \star, \circ)$ matematik sistemine *değişmeli cisim* adı verilir.

POLİNOMLAR

13

- **POLİNOM** : $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ifadesine x 'in reel katsayılı polinomu denir.

Reel sayılarla x 'in birleşimi olan en dar haika $P(x)$ polinom halkasıdır.

- $P(x)$ polinomu bir değişkenli.

$P(x, y)$ polinomu iki değişkenlidir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ifadesinde,
 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$: polinomun katsayıları,
 n : polinomun derecesi,
 a_n : polinomun başkatsayısı,
 a_0 : polinomun sabit terimidir.

- **SABİT POLİNOM** : $P(x) = a_0$ ($a_0 \in \mathbb{R}$) polinomuna *sabit polinom* denir. Sabit polinomun derecesi 0 dir.

$P(x) = a x^0, P(x) = 5x^0$ gibi.

- **SIFIR POLİNOMU** : $P(x) = 0$ polinomuna *sıfır polinomu* denir. Sıfır polinomunun derecesi yoktur.

$P(x) = 0 \cdot x^5, P(x) = 0 \cdot x^{100}$ gibi farklı derecelerin bulunuşu sabit polinomunun derecesinin olmadığını gösterir.

- **KATSAYILAR TOPLAMI** : Bir polinomun katsayıları toplamı, değişkenlere "1" rakamı verilerek elde edilir.

$P(x)$ 'in katsayılar toplamı $P(1)$,
 $P(x, y)$ 'nin katsayılar toplamı $P(1, 1)$ dir.

- $P(x)$ 'in çift kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamı $P_{\text{ç}}$ ve tek kuvvetli terimlerinin katsayıları toplamı P_{t} ise :

$$P_{\text{ç}} = \frac{P(1) + P(-1)}{2}, P_{\text{t}} = \frac{P(1) - P(-1)}{2} \text{ dir.}$$

- **SABİT TERİM** : Bir polinomun sabit terimi değişkenlere "0" rakamı verilerek elde edilir.

$P(x)$ 'in sabit terimi $P(0)$ dir.

- **İKİ POLİNOMUN EŞİTLİĞİ** : İki polinom eşitse aynı dereceli terimlerin katsayıları birbirine eşittir.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \text{ olsun.}$$

$$P(x) = Q(x) \text{ ise } a_n = b_n$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$a_1 = b_1$$

$$a_0 = b_0 \text{ dir}$$

- **TOPLAMA - ÇIKARMA** : Polinomlar toplanıp çıkarılırken, aynı dereceli terimlerin katsayıları ile işlem yapılır.

$$\left. \begin{array}{l} \text{der } [P(x)] = m \\ \text{der } [Q(x)] = n \end{array} \right\} m > n \text{ için : } \text{der } [P(x) \pm Q(x)] = m$$

- **ÇARPMA-BÖLME** : Çarpma işleminde dağılma özeliği kullanılır. Bölme ise özel yöntemler tatbik edilir.

$$\left. \begin{array}{l} \text{der } [P(x)] = m \\ \text{der } [Q(x)] = n \end{array} \right\} m \geq n \text{ için : } \begin{array}{l} \text{der } [P(x) \cdot Q(x)] = m+n \\ \text{der } [P(x) : Q(x)] = m-n \end{array}$$

● BÖLME ÇEŞİTLERİ :

$$\begin{array}{rcl} \text{Bölünen} & \leftarrow & P(x) \left| \begin{array}{l} Q(x) \rightarrow \text{Bölen} \\ R(x) \rightarrow \text{Bölüm} \end{array} \\ \hline & & K(x) \rightarrow \text{Kalan} \end{array}$$

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + K(x)$$

Verilen bölme işleminde ;

$$\begin{aligned} \text{der } [P(x)] &\geq \text{der } [Q(x)] > \text{der } [K(x)] \\ \text{der } [P(x)] &\geq \text{der } [R(x)] \\ \text{der } [P(x)] &= \text{der } [Q(x)] + \text{der } [R(x)] \end{aligned}$$

● **KLASİK BÖLME :**

ÖRNEK :

$$\begin{array}{r} \cancel{x^4} - 2x^3 + 1 \quad | \quad x^2 + 2 \\ \hline \mp \cancel{x^4} \mp 2x^2 \\ \hline \phantom{\mp \cancel{x^4} \mp 2x^2} - 2x^3 - 2x^2 + 1 \\ \phantom{\mp \cancel{x^4} \mp 2x^2} \pm 2x^3 \pm 4x \\ \hline \phantom{\mp \cancel{x^4} \mp 2x^2} - 2x^2 + 4x + 1 \\ \phantom{\mp \cancel{x^4} \mp 2x^2} \pm 2x^2 \pm 4 \\ \hline \phantom{\mp \cancel{x^4} \mp 2x^2} 4x + 5 \end{array}$$

$P(x) = x^4 - 2x^3 + 1$: Bölünen
 $Q(x) = x^2 + 2$: Bölen
 $R(x) = x^2 - 2x - 2$: Bölüm
 $K(x) = 4x + 5$: Kalan

$$\underbrace{x^4 - 2x^3 + 1}_{P(x)} = \underbrace{(x^2 + 2)}_{Q(x)} \underbrace{(x^2 - 2x - 2)}_{R(x)} + \underbrace{4x + 5}_{K(x)}$$

● HORNER METODU :

▮ Bir $P(x)$ polinomunu Horner'le $x-a'$ ya bölmek için :

1°.

II	I
	III

 şeklinde tablo yapılır.

2°. $P(x)$ 'in katsayıları x 'in azalan kuvvetlerine göre I bölgesine yazılır.

3°. $x-a=0$ 'ın kökü olan $x=a$ değeri II bölgesine yazılır.

4°. Baskatsayı, bulunduğu sütunda III bölgesine indirilir.

5^{nci} a değeri başkatsayı ile çarpılarak bir sonraki katsayı ile toplanır. Bu işlem tüm katsayılar için uygulanır.

6°. En son elde edilecek değer $P(x)$ 'in $x-a$ ile bölümünden kalanı, diğerleri ise bölüm polinomunun katsayılarını verir.

Uygulama :

$P(x) = 4x^4 - 6x^3 - 5x + 7$ polinomunu $x-2$ ile bölerek bölüm ve kalanı bulalım.

$P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 0x^2 - 5x + 7$
 $x - 2 = 0$
 $x = 2$

 4 2 4 3 13 : R

Kalan : $K(x) = 13$

Bölüm : $Q(x) = 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

$Q(x)$ 'in derecesi: $\text{der}[P(x)] - \text{der}[x-2] = 4 - 1 = 3$ tür.

❑ Bir $P(x)$ polinomunu $(x-a)(x-b)$ ye Horner'le bölmek için :

- 1°. Yukarıdaki işlemler $x-a$ için uygulanır.
- 2°. $x-a$ ile elde edilen bölüm polinomunun katsayıları kullanılarak, Horner Metoduyla bölme işlemi $x-b$ için bir daha uygulanır.
- 3°. İlk kalana k_1 , ikinci kalana k_2 denir. $P(x)$ 'in $(x-a)(x-b)$ ile bölümünden kalan $K(x)$, bölüm $T(x)$ ise

$$K(x) = (x-a)k_2 + k_1 \text{ dir.}$$

$T(x)$ ise son işlemdeki değerleri katsayı olarak alan polinomdur.

$$\text{der}[T(x)] = \text{der}[P(x)] - 2 \text{ dir.}$$

❑ **Uygulama :**

$P(x) = x^5 - 3x^3 + 4x - 8$ 'in $(x+2)(x-1)$ ile bölümünden kalan ve bölümü horner metoduyla bulalım.

$$P(x) = x^5 + 0x^4 - 3x^3 + 0x^2 + 4x - 8$$

$x+2=0$ $x=-2$	1	0	-3	0	4	-8
	-2	-2	4	-2	4	-16
$x-1=0$ $x=1$	1	-2	1	-2	8	-24 : k_1
	1	1	-1	0	-2	
	1	-1	0	-2	6 : k_2	

Kalan : $K(x) = (x-a)k_2 + k_1$
 $K(x) = (x+2) \cdot 6 + (-24)$
 $K(x) = 6x - 12 \text{ ve}$

Bölüm : $T(x) = x^3 - x^2 - 2$ bulunur.

● EŞİTLEME METODUYLA BÖLME :

$P(x)$ polinomunun $Q(x)$ 'e bölümünde, bölüm ve kalanı bulmanın diğer bir yolu da polinomların eşitliğinden yararlanarak yapılan bölmedir. *Bu bölme işleminde polinomlarda derece kavramları dikkate alınarak yorum yapılır.*

Uygulama :

$P(x) = x^3 - 4x + 1$ polinomunun $Q(x) = x^2 + 2$ ile bölümünden bölüm $R(x)$ ve kalan $K(x)$ olsun.

$$\text{der}[R(x)] = 3 - 2 = 1 \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{der}[K(x)] \text{ en çok } 2 - 1 = 1 \text{ olabilir.}$$

O halde, $R(x) = ax + b$ ve $K(x) = mx + n$ seçilebilir.

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x) + K(x)$$

$$x^3 - 4x + 1 = (x^2 + 2)(ax + b) + mx + n$$

$$x^3 - 4x + 1 = ax^3 + bx^2 + (2a + m)x + 2b + n \text{ olur. Bu eşitlikten}$$

$$a=1, \quad b=0, \quad 2a+m=-4, \quad 2b+n=1$$

$$m=-6, \quad n=1 \text{ bulunur.}$$

$$\text{O halde } R(x) = ax + b = 1 \cdot x + 0 = x,$$

$$K(x) = mx + n = -6x + 1 \text{ dir.}$$

● POLİNOMLARDA BÖLEN-KALAN İLİŞKİLERİ:

❑ $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dir.

$$P(x) = (x-a) Q(x) + K(x)$$

$$x=a \text{ için } P(a) = K(a) \text{ (sabit)}$$

❑ $P(x)$ polinomunun $(x-a)(x-b)$ ile bölümünden kalan, birinci dereceden $mx + n$ polinomudur.

$$P(x) = (x-a)(x-b) Q(x) + mx + n$$

$$x=a \text{ için : } P(a) = ma + n$$

$$x=b \text{ için : } P(b) = mb + n$$

- ❑ $P(x)$ polinomunun $(x-a)^n$ ile bölümünden kalan $K(x)$ ise $P(x)$ 'in $x-a$ ile bölümünden kalan $K(a)$ dir.

$$P(x) = (x-a)^n \cdot Q(x) + K(x)$$

$$P(a) = K(a)$$

❑ **Türev Kuralı :**

$P(x)$ polinomunun $(x-a)^n$ ile bölümünden kalan 0 ise,

$$P(a)=0, P'(a)=0, P''(a)=0, \dots, P^{(n-1)}(a)=0 \text{ dir.}$$

- ❑ $P(x)$ polinomunun x^n+a ile bölümünden kalanı bulmak için, polinomda x^n yerine $(-a)$ yazılır.
- ❑ $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden bölüm $Q(x)$ kalan k_1 , $Q(x)$ polinomunun $x-b$ ile bölümünden kalan k_2 ise $P(x)$ 'in $(x-a)(x-b)$ ile bölümünden kalan

$$K(x) = (x-a)k_2 + k_1 \text{ dir.}$$

- ❑ $P(ax+b)$ polinomunun $mx+n$ 'e bölümünden kalan :

$$mx+n=0 \text{ ise, } x = -\frac{n}{m} \text{ dir.}$$

$$\text{Kalan : } P\left(a \cdot \left(-\frac{n}{m}\right) + b\right)$$

$$: P\left(-\frac{an}{m} + b\right)$$

- ❑ $P(ax+b)$ polinomunun sabit terimi $P(b)$ 'dir.
- ❑ $P(ax+b)$ polinomunun katsayılar toplamı $P(a+b)$ 'dir.

● **POLİNOMLARDA OBEB-OKEK**

İki polinomun OBEB'i, her iki polinomu da tam bölen en büyük dereceli polinomdur. OKEK'i ise her iki polinoma da tam bölünen en küçük dereceli polinomdur.

OBEB ve OKEK bulunurken :

- 1°. Polinomlar çarpanlara ayrılır.
- 2°. Ortak olan çarpanların en küçük üslûlerinin çarpımından OBEB bulunur.
- 3°. Ortak olan çarpanların en büyük üslûleri ile ortak olmayan çarpanların çarpımından OKEK bulunur.

ÖRNEK :

$$P(x) = x^3 - 4x, Q(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$$

$$1^\circ. P(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$

$$Q(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)(x+1)$$

$$2^\circ. \text{OBEB : } x(x-2) = x^2 - 2x$$

$$3^\circ. \text{OKEK : } x^2(x-2)(x+2)(x+1) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$$

II. ve III. DERECE DENKLEM FONKSİYON ve DENKLEMLER

14

- **2. DERECE DENKLEM FONKSİYON** : $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesine 2. dereceden x 'e bağlı fonksiyon denir. Bu fonksiyonun grafiği bir parabolüdür.

- **2. DERECE DENKLEM** : $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ ifadesine 2. dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

- **DISKRİMİNANT** : $\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesine $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı denir. Δ yardımıyla 2. dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **YARI FORMÜL** : $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde b 'nin çift olduğu durumlarda :

$$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{dır.}$$

- **KATSAYILARIN ($a, b, c \in \mathbb{R}$) İNCELENMESİ** :

$ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) denkleminde

i. $a+b+c=0$ ise kökler : $x_1=1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$ dır.

ii. $a-b+c=0$ ise kökler : $x_1=-1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$ dır.

iii. $c=0$ ise kökler : $x_1=0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$ dır.

iv. $b=0$ ise kökler : $x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ve $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Bu durumda denklemin simetrik iki kökü var, denir.

$a.c \leq 0$ ise simetrik kökler reel,
 $a.c > 0$ ise simetrik kökler sanaldır.

v. $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ ve $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ denklemlerinin çözüm kümeleri aynıysa katsayıları orantılıdır.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{dır.}$$

- **KÖKLERİN VARLIĞININ İNCELENMESİ**

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ 'nın durumu Δ 'ya bağlıdır.

i. $\Delta \geq 0$ ise denklemin reel sayılarda çözümünü vardır.

ii. $\Delta > 0$ ise iki farklı reel kök vardır.

$$\mathcal{C} = \{x_1, x_2 \mid x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$\Delta = 0$ ise çift katlı bir kök vardır.

$$\mathcal{C} = \left\{ x_1, x_2 \mid x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R} \right\}$$

iii. $\Delta < 0$ ise denklemin reel sayılarda çözümünü yoktur. Yani kökler sanaldır.

$$\mathcal{C} = \{x_1, x_2 \mid x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}\} = \emptyset$$

● KÖK-KATSAYI BAĞINTILARI

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ise :}$$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$	$\frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{a}{c}$
$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$	$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$
$x_1^3 + x_2^3 = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$	$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{-b^3 + 3abc}{c^3}$
$ x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$	$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = \frac{-bc}{a^2}$

Bu formüller, özdeşlikler yardımıyla elde edilebilir. $x_1 + x_2$ ve $x_1 x_2$ 'nin eşiti bilinirse konuya ilgili her formülü elde etmek mümkündür.

□ *Bazı hatırlatmalar :*

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + 2x_1 x_2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

● KÖKLERİ BİLİNEN 2.DERECE DENKLEMİN KURULUŞU :

Çözüm kümesi $\mathcal{C} = \{x_1, x_2\}$ olan 2. derece denklem ;

$$\begin{array}{c} (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \\ x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \quad \text{olur.} \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ -\frac{b}{a} \qquad \qquad \qquad \frac{c}{a} \end{array}$$

NOT: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ denkleminin katsayıları sıfırdan farklı herhangi bir reel sayıya genişletilip sadeleştirilebilir.

● 3.DERECE DENKLEM ve KÖK-KATSAYI İLİŞKİLERİ :

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denkleminde ($a \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Bu denklemin kökleri x_1, x_2 ve x_3 ise :

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$
$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$
$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{b}{d}$
$\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2} = \frac{2ac - b^2}{ad}$

Üçüncü derece denklemin x_1, x_2, x_3 kökleri :

Aritmetik dizi oluşturuyorsa,

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = x_2 \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a}$$

Geometrik dizi oluşturuyorsa,

$$\sqrt{x_1 \cdot x_3} = x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = x_2^2$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$$

NOT : n inci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin

kökler toplamı, her zaman $-\frac{b}{a}$,

kökler çarpımı ise $(-1)^n \cdot \frac{\text{Sabit terim}}{a}$ dir.

Buna göre :

$$5x^8 - 4x^7 + 6x^2 - 8x + 21 = 0 \text{ denkleminde ,}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = -\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_8 = (-1)^8 \cdot \frac{21}{5} = \frac{21}{5} \text{ tir.}$$

EŞİTSİZLİKLER

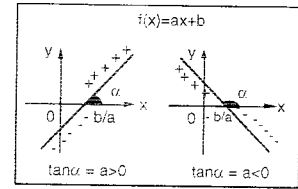
15

● **EŞİTSİZLİK** : $f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$ veya $f(x) \leq 0$ ifadelerine *fonksiyonların eşitsizliği* denir.

Bu eşitsizlikleri sağlayan reel sayıların oluşturduğu kümeye de *çözüm kümesi* adı verilir.

● **BİRİNCİ DERECE DEN EŞİTSİZLİK** : $f(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun eşitsizlik tablosu aşağıda verilmiştir.

$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$	a'nın işaretinin TERSİ	a'nın işaretinin AYNI



Yukarıdaki grafikleri verilen $f(x) = ax + b$ doğrusunun a'nın işaretine göre durumları eşitsizlik tablosunu doğurmuştur.

ÖRNEK : $(2x+1) (3-x) < 0$

x	$-\infty$	$-1/2$	3	$+\infty$
$2x+1$	-	+	+	+
$3-x$	+	+	-	-
$f(x)$	-	+	-	-

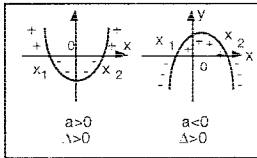
$$\text{Ç : } (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (3, \infty) \text{ veya } \text{Ç : } -\infty < x < -\frac{1}{2} \cup 3 < x < \infty$$

● İKİNCİ DERECEDEKİ EŞİTSİZLİKLER :

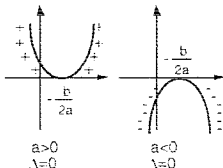
$f(x)=ax^2+bx+c$ parabol fonksiyonunun eşitsizlik tablosu verilmiştir.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun .

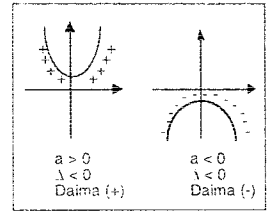
$\Delta > 0$ ise $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$				
X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	a'nın işaretinin AYNI	a'nın işaretinin TERSİ	a'nın işaretinin AYNI	



$\Delta = 0$ ise $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$		
x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	a'nın işaretinin AYNI	a'nın işaretinin AYNI



$\Delta < 0$ ise $x \notin \mathbb{R}$		
x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	a'nın işaretinin AYNI	
$a > 0$ $\Delta < 0$	+ + + f(x) > 0	
$a < 0$ $\Delta < 0$	- - - f(x) < 0	



Yukarıda grafikleri verilen $f(x) = ax^2+bx+c$ parabolünün a'nın ve Δ 'nin işaretine göre durumları eşitsizlik tablosunu doğurmuştur.

ÖRNEK :

$\frac{(x^2-4)(2x^2-x+3)}{x^2-6x+9} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$\begin{array}{lll} x^2-4=0 & 2x^2-x+3=0 & x^2-6x+9=0 \\ x=\pm 2 & x \notin \mathbb{R} & x=3 \\ (\Delta > 0) & (\Delta < 0) & (\Delta = 0) \end{array}$$

x	-2	2	3	
x^2-4	+	-	+	Ç : (-2,2)
$2x^2-x+3$	+	+	+	veya
x^2-6x+9	+	+	+	Ç : -2 < x < 2
f(x)	+	-	+	

● PRATİK TABLO YAPMA KURALI :

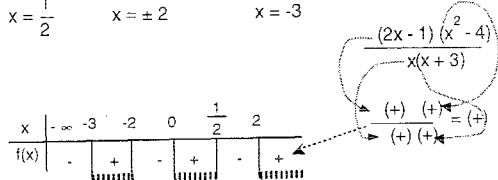
Polinom fonksiyonlarından oluşan rasyonel fonksiyonların eşitsizliği incelenirken ;

- 1°. Tablodaki sayı eksen kısmına fonksiyonu oluşturan polinomların kökleri sırayla yazılır.
- 2°. Fonksiyonu oluşturan polinom parçalarının **baş katsayısının** işaretleri çarpılır-bölünür ve fonksiyona ait kararlı bir işaret belirlenir.
- 3°. Belirlenen işaret tabloda **en sağ** bölmeye yazılır ve sola doğru her **tek** katlı kökte işaret değiştirerek dağıtılır.
- 4°. Çift katlı köklerin sağ ve solunda işaret değişmez.

ÖRNEK : $\frac{(2x-1)(x^2-4)}{x(x+3)} > 0$ eşitsizliğinin doğruluk kümesini bulalım :

$$2x-1=0, \quad x^2-4=0, \quad x=0, \quad x+3=0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x = \pm 2 \quad x = -3$$



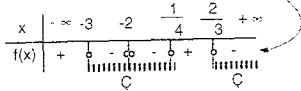
$$\mathcal{C} : (-3, -2) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty) \text{ veya}$$

$$\mathcal{C} : \{x \in \mathbb{R}, -3 < x < -2 \vee 0 < x < \frac{1}{2} \vee 2 < x < \infty\}$$

ÖRNEK :

$$\frac{(x^2+4x+4)(x+3)}{(1-4x)(3x-2)} \leq 0 \quad \text{eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?}$$

$$\begin{aligned} x^2+4x+4=0, & \quad x+3=0, & \quad 1-4x=0, & \quad 3x-2=0 \\ (x+2)^2=0, & \quad x=-3, & \quad x=\frac{1}{4}, & \quad x=\frac{2}{3} \\ x_1=x_2=-2 & & & \\ (\text{Çift katlı kök}) & & & \end{aligned}$$



$$\mathcal{C} : \left\{ -3 < x < -\frac{1}{4} \vee \frac{2}{3} < x < \infty \right\} \text{ veya } \mathcal{C} : \left[-3, \frac{1}{4} \right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty \right)$$

NOT : Rasyonel eşitsizliklerde, paydanın kökleri çözüm kümesine dahil edilmez.

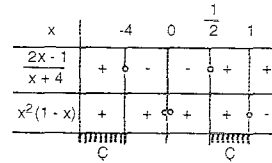
● **EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ :** Birden çok eşitsizliğin beraber çözümlendiği problemlere *eşitsizlik sistemi* denir. Bir eşitsizlik sisteminde verilen eşitsizliklerin hepsini aynı anda sağlayan sayılar eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

ÖRNEK :

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x-1}{x+4} > 0 \\ x^2(1-x) > 0 \end{aligned} \right\} \mathcal{C} : ?$$

$$\begin{aligned} 2x-1=0 & \quad x+4=0 & \quad x^2=0 & \quad 1-x=0 \\ x=\frac{1}{2} & \quad x=-4 & \quad x=0 & \quad x=1 \end{aligned}$$

(Çift kök)



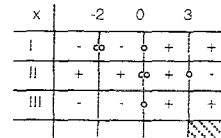
Her ikisinde

(+) olduğu aralık,

$$\mathcal{C} : (-\infty, -4) \cup \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

ÖRNEK :

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } x^{1453}(x+2)^{1924} > 0 \\ \text{II. } \frac{x^{20}}{3-x} < 0 \\ \text{III. } 2x(x^2+4) > 0 \end{aligned} \right\} \mathcal{C} = ?$$



Her üçünde de beraber
sağlayan aralık (+, -, +)
olacağından
 $\mathcal{C} = (3, \infty)$

● **KÖKLERİN İŞARETİNİN İNCELENMESİ :**

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri reel ise ($\Delta \geq 0$), köklerin işaretini bulmak için önce $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, sonra da $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ya bakılır. Daha sonra aşağıdaki kurallar ile işaretler tespit edilir.

□ $\Delta > 0$ iken

$x_1 \cdot x_2 > 0$ ise, kökler aynı işaretlidir.

Bununla birlikte;

i. $x_1 + x_2 > 0$ ise, iki kökte pozitiftir.

Yani, $0 < x_1 < x_2$ dir.

ii. $x_1 + x_2 < 0$ ise, iki kökte negatiftir.

Yani $x_1 < x_2 < 0$ dir.

$x_1 \cdot x_2 < 0$ ise, kökler zıt işaretlidir.

Yani, $x_1 < 0 < x_2$ dir. Buradan :

i. $x_1 + x_2 > 0$ ise, pozitif kök mutlak değerce diğerinden daha büyüktür.

Yani $|x_2| > |x_1|$ dir.

ii. $x_1 + x_2 < 0$ ise, negatif kök mutlak değerce diğerinden daha büyüktür.

Yani $|x_1| > |x_2|$ dir.

iii. $x_1 + x_2 = 0$ ise, kökler mutlak değerce eşittir. Bu durumda $b=0$ dir.

Yani $|x_1| = |x_2|$ dir.

$x_1 \cdot x_2 = 0$ ise en az bir kök sıfırdır.

Buradan :

$x_1 + x_2 > 0$ ise $x_1 = 0$ ve $x_2 > 0$ dir.

$x_1 + x_2 < 0$ ise $x_1 = 0$ ve $x_2 < 0$ dir.

$x_1 + x_2 = 0$ ise $x_1 = x_2 = 0$ dir.

● $k \in \mathbb{R}$ ile KÖKLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ denkleminin reel kökleri x_1 ve x_2 olsun ($\Delta > 0$). Bir k reel sayısıyla kökleri karşılaştırmak istediğimizde aşağıdaki kurallar gereği hareket edilir.



□ $k \in \mathbb{R}$ sayısı kökler arasındaysa ;

Yani $x_1 < k < x_2$ ise ;

$a \cdot f(k) < 0$ dir.

□ $k \in \mathbb{R}$ sayı kökler dışındaysa ;

Yani $x_1 < x_2 < k$ veya $k < x_1 < x_2$ ise

$a \cdot f(k) > 0$ dir.

Bununla birlikte ;

$$i. k < x_1 < x_2 \Rightarrow k < -\frac{b}{2a}$$

$$ii. x_1 < x_2 < k \Rightarrow k > -\frac{b}{2a} \text{ dir.}$$

● SONUÇ : $k, p \in \mathbb{R}$

i. $x_1 < k < x_2 < p$

ii. $k < x_1 < p < x_2$

$$1. a \cdot f(k) < 0$$

$$2. a \cdot f(p) > 0$$

$$3. k > -\frac{b}{2a}$$

$$1. a \cdot f(p) < 0$$

$$2. a \cdot f(k) > 0$$

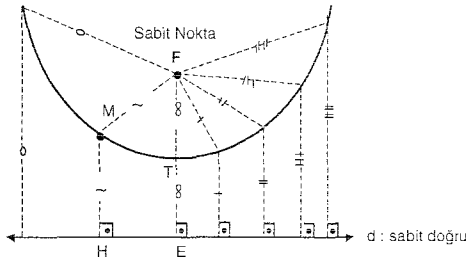
$$3. k > -\frac{b}{2a}$$

iii. Yalnız bir kök k ile p arasında ise ;

Yani $k < x_1 < p$ ise, **$f(k) \cdot f(p) < 0$**

● **PARABOL** : Düzlemde sabit bir nokta ve sabit bir doğruya eşit uzaklıkları noktaların kümesine *parabol* denir.

Burada sabit noktaya *parabolün odağı* (F) sabit doğruya da *parabolün doğrultmanı* (d) denir.



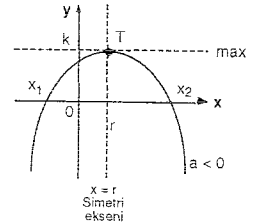
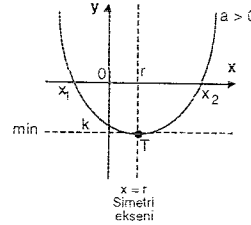
- F : Parabolün odak noktası
- d : Parabolün doğrultmanı
- M parabolün üzerinde herhangi bir nokta ise,
|MF| = |MH|
- T parabolün tepe noktası ise
|TF| = |TE|

(r,k) parabolün tepe noktasının koordinatları olmak üzere,

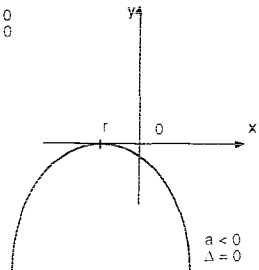
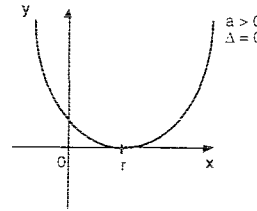
$f(x) = a(x - r)^2 + k$ 'ya kapalı parabol fonksiyonu,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 'ye açık parabol fonksiyonu denir.

● $f(x) = a(x - r)^2 + k$ 'NİN İNCELENMESİ :

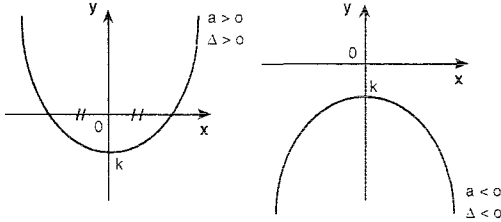


- T (r,k) : Tepe noktası
- x = r : Simetri eksenı
- x = -b/2a doğrusu parabolün simetri eksenıdır. b=0 ise parabol y-eksenıne göre simetrıktır.
- y = k : Extremum değır (max - min)
- a > 0 ise kollar yukarı doğrudur. Parabol, tepe noktasının ordınatında *minimum* değere sahiptir.
- a < 0 ise kollar aşağı doğrudur. Parabol, tepe noktasının ordınatında *maksimum* değere sahiptir.
- k = 0 ise parabolün tepe noktası T (r, 0) 'dır. Bu durumda grafik x eksenıne teğettır.
- y = a (x - r)² parabolü aşağıdaki gibıdır.

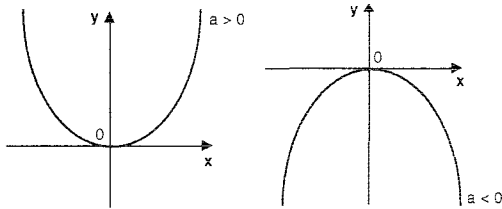


- $r = 0$ ise parabolün tepe noktası $T(0,k)$ 'dir. Bu durumda grafik y eksenine göre simetriktr.

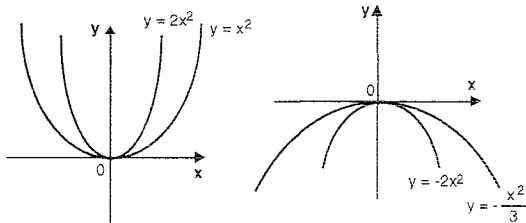
$y = ax^2 + k$ parabolleri aşağıdaki gibidir.



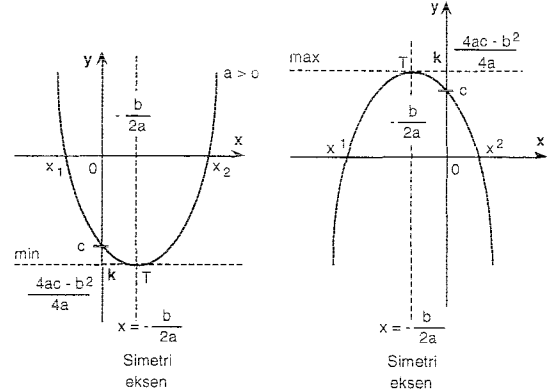
- $k = 0$ ve $r = 0$ ise parabolün tepe noktası $T(0,0)$ dir. Bu durumda grafik orijinde x eksenine teğettir.
- $y = ax^2$ parabolleri aşağıdaki gibidir.



- $|a|$ büyüdükçe parabolün kolları arası daralır, küçüldükçe ise genişler.



● $f(x) = ax^2 + bx + c$ 'NİN İNCELENMESİ :



Tepe Noktası : $T(r, k) = T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$$= T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$= T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$x = -\frac{b}{2a}$: Simetri Eksen

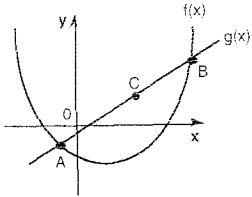
**$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$: Ekstremum
(max - min)**

- $a > 0$ ise, kollar yukarı doğrudur.
- $a < 0$ ise kollar aşağı doğrudur.
- Parabol y eksenini $A(0, c)$ noktasında keser.
- $c = 0$ ise parabolün bir kolu orijinden geçer.

● PARABOL - DOĞRU İLİŞKİSİ :

Düzlemde, $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ve $g(x) = mx + n$ doğrusunun birbirine göre durumları, bu iki fonksiyonun ortak çözümünü ile bulunur.

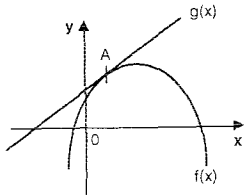
- Parabol ile doğru iki farklı noktada kesişiyorsa, ortak çözümün *diskriminantı pozitif*dir. Kesim noktalarının apsisi ise ortak çözümün kökleridir.



$$f(x) = g(x)$$

$$\Delta > 0$$

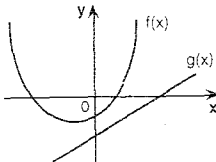
- İABI'nin orta noktası C ise, C noktasının apsisi $f(x) = g(x)$ denkleminin köklerinin aritmetik ortasıdır.
- Parabol ile doğru birbirine teğetse, ortak çözümün *diskriminantı 0*'dir. Teğetlik noktasının apsisi ise ortak çözümün çift katlı köküdür.



$$f(x) = g(x)$$

$$\Delta = 0$$

- Parabol ile doğru hiçbir noktada kesişmiyorsa ortak çözüm yoktur. Yani *diskriminant negatiftir*.



$$f(x) = g(x)$$

$$\Delta < 0$$

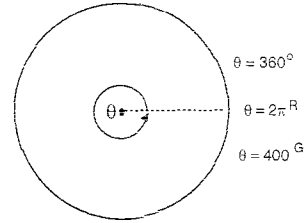
TRİGONOMETRİ

17

- **TRİGONOMETRİ** : Üçgenin kenarlarıyla açıları arasındaki bağıntıları inceleyen bilim dalına *trigonometri* denir.

● AÇI BİRİMLERİ :

- **Derece - Radyan - Grad** : Çember yayının tamamını gören merkez açıya 360 Derece, 2π Radyan, 400 Grad denir.



- **Derece - Radyan - Grad İlişkisi** : Bu açı birimleri arasında aşağıdaki orantı vardır.

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} = \frac{G}{400}$$

- **Dakika - Saniye - Salise** : Bu zaman birimleri için,

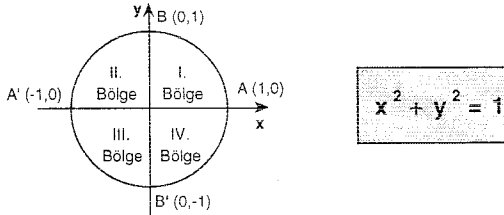
$$1 \text{ dak} = 60 \text{ sn}$$

$$1 \text{ sn} = 60 \text{ salise, eşitlikleri yazılır.}$$

● **BİRİM ÇEMBER** : Yarıçapı 1 birim olan merkezli çembere birim çember veya trigonometri çemberi denir.

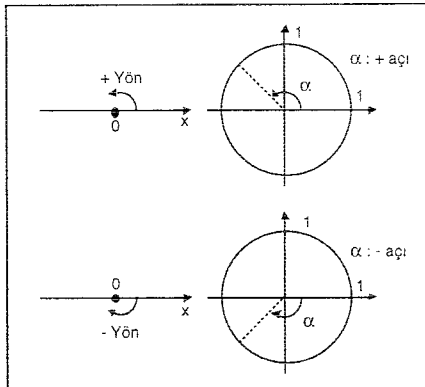
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ genel çember denkleminde

$a = 0$, $b = 0$ ve $r = 1$ alınarak oluşturulan $x^2 + y^2 = 1$ çemberi birim çemberdir.



NOT : Yarıçapı 1 birim olan her çember birim çember değildir.

● **YÖNLÜ AÇI** : Matematikte saatın dönme yönü "negatif yön", saatın dönme yönünün tersi ise "pozitif yön"dür. Birim çemberde saatın dönme yönünde alınan açıya "negatif açı", saatın dönme yönünün tersinde alınan açıya ise "pozitif açı" denir.



● SARMA FONKSİYONU :

Reel sayı doğrusunun herhangi bir x elemanını birim çember üzerindeki bir noktaya eşleyen fonksiyona *sarma fonksiyon* denir.

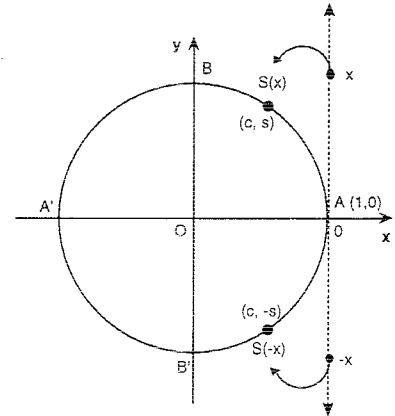
S : Sarma fonksiyonu

$\mathbb{C}$: Birim çemberi göstermek üzere;

$S(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{C}$ 'ye örten bir fonksiyondur.

$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere $S(x) = (c,s)$ olarak gösterilir.

(c,s) sıralı ikisi, $s(x)$ noktasının x ve y eksenleri üzerindeki apsis ve ordinatlarına karşılık gelir.



Reel sayı doğrusunun 0 başlangıç noktası birim çember üzerindeki A noktasına karşılık gelir.

- **ESAS ÖLÇÜ** : α bir açı olmak üzere; $\alpha \equiv \theta \pmod{360^\circ}$ eşitliğini gerçekleyen $\theta \in [0, 360^\circ]$ açısına α 'nın esas ölçüsü denir.

$$\alpha \equiv \theta \pmod{360} \Rightarrow \text{"}\alpha\text{'nın derece türünden esas ölçüsü } \theta\text{'dir."}$$

$$\alpha \equiv \theta \pmod{2\pi} \Rightarrow \text{"}\alpha\text{'nın radyan türünden esas ölçüsü } \theta\text{'dir."}$$

$$\alpha \equiv \theta \pmod{400} \Rightarrow \text{"}\alpha\text{'nın grad türünden esas ölçüsü } \theta\text{'dir."}$$

Verilen ifadeler, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere :

$$\alpha = \theta + 360k, \quad 0 \leq \theta < 360$$

$$\alpha = \theta + 2\pi k, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\alpha = \theta + 400k, \quad 0 \leq \theta < 400$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEK :

7320° ve -7320° açılarının esas ölçülerini bulunuz.

Çözüm;

7320	360	θ = 120° esas ölçüdür.
720	20	
120		

-7320° açısının esas ölçüsü θ' ise :

θ' : 360° - 120° = 240° dir.

ÖRNEK :

$\frac{75\pi}{4}$ ve $-\frac{75\pi}{4}$ açılarının esas ölçülerini bulunuz.

Çözüm;

75	8	θ = $\frac{3\pi}{4}$
72	9	
3		

θ' = $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ tür.

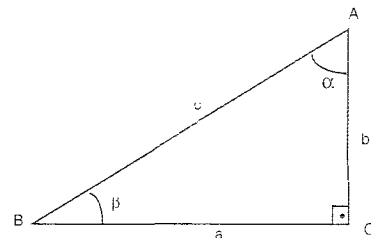
- **DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK ORANLAR :**

$$\sin \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar}}{\text{Komşu dik kenar}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar}}{\text{Karşı dik kenar}}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \beta = \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \sin \beta = \frac{b}{c} \\ \tan \alpha &= \cot \beta = \frac{a}{b} \\ \cot \alpha &= \tan \beta = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Sonuç :

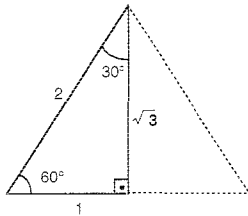
Birbirini 90° tamamlayan iki açının trigonometrik fonksiyonları birbirinin ko-fonksiyonlarıdır.

Bir başka ifadeyle, toplamı 90° olan iki açıdan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne ve birinin tanjantı, diğerinin kotanjantına eşittir.

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

● ÖZEL AÇILARIN (30° - 45° - 60°) TRİGONOMETRİK DEĞERLERİ :

□ 30° ve 60° için :



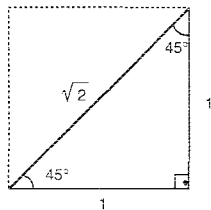
$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

□ 45° için :



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

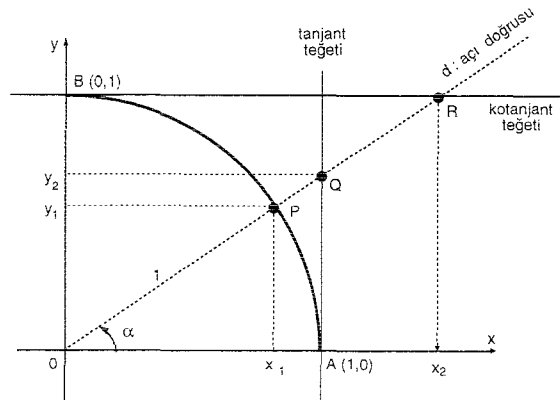
$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\cot \theta$	$+\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

● QUADRANTAL AÇILARIN TRİGONOMETRİK DEĞERLERİ:

θ	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$+\infty$	0	$-\infty$	0
$\cot \theta$	$+\infty$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

● TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR :

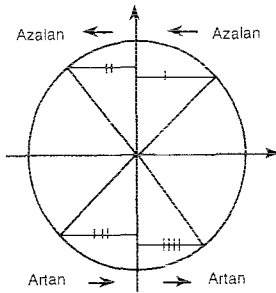


d doğrusu 0x ekseniiyle pozitif yönde α açısı yaparak birim çemberi $P(x_1, y_1)$, tanant teğetini $Q(1, y_2)$, kotanjant teğetini de $R(x_2, 1)$ noktalarında kesmektedir.

□ **KOSİNÜS** : Açı doğrusunun birim çemberi kestiği noktanın apsisine α açısının kosinüsü denir.

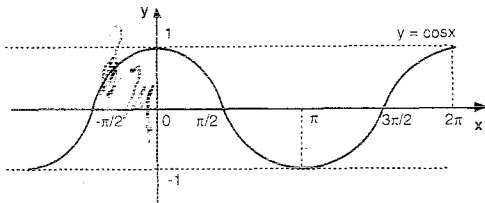
$$\cos \alpha = \frac{x_1}{1} \Rightarrow x_1 = \cos \alpha$$

$$P(x_1, y_1) = P(\cos \alpha, y_1)$$



$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$$

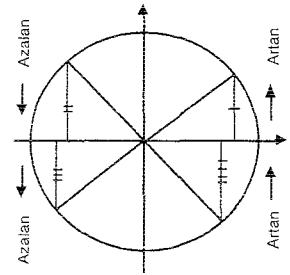
x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↗



□ **SİNÜS** : Açı doğrusunun birim çemberi kestiği noktanın ordinatına α açısının sinüsü denir.

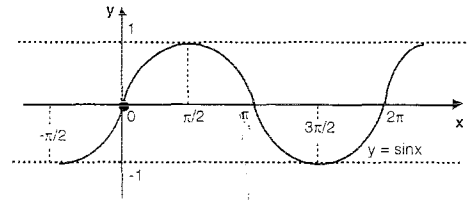
$$\sin \alpha = \frac{y_1}{1} \Rightarrow y_1 = \sin \alpha$$

$$P(x_1, y_1) = P(x_1, \sin \alpha)$$



$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$$

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗



● TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TANIM ve GÖRÜNTÜ KÜMELERİ :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2} \right\} : -\infty < \tan \alpha < +\infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi\} : -\infty < \cot \alpha < +\infty$$

● TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GÖRÜNTÜLERİNİN İŞARETLERİ :

θ	I. Bölge $0 < \theta < 90$	II. Bölge $90 < \theta < 180$	III. Bölge $180 < \theta < 270$	IV. Bölge $270 < \theta < 360$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-
$\cot \theta$	+	-	+	-

● BÖLGELERDEKİ ESAS ÖLÇÜLERİ DAR AÇILAR CİNSİNDEN GÖSTERMEK :

$$\square \sin (2k\pi + x) = \sin x$$

$$\cos (2k\pi + x) = \cos x$$

$$\tan (2k\pi + x) = \tan x$$

$$\cot (2k\pi + x) = \cot x$$

$$\square \sin (\pi - x) = \sin x$$

$$\cos (\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan (\pi - x) = -\tan x$$

$$\cot (\pi - x) = -\cot x$$

$$\square \sin (\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos (\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan (\pi + x) = \tan x$$

$$\cot (\pi + x) = \cot x$$

$$\square \sin (2\pi - x) = -\sin x$$

$$\cos (2\pi - x) = \cos x$$

$$\tan (2\pi - x) = -\tan x$$

$$\cot (2\pi - x) = -\cot x$$

$$\square \sin (-x) = -\sin x$$

$$\cos (-x) = \cos x$$

$$\tan (-x) = -\tan x$$

$$\cot (-x) = -\cot x$$

$$\square \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cot x$$

$$\cot \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \tan x$$

$$\square \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\cot x$$

$$\cot \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\tan x$$

$$\square \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = -\cos x$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = -\sin x$$

$$\tan \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = \cot x$$

$$\cot \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = \tan x$$

$$\square \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = -\cos x$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin x$$

$$\tan \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = -\cot x$$

$$\cot \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = -\tan x$$

● TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN BİRBİRİ CİNSİNDEN İFADESİ :

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $\tan x \cdot \cot x = 1 \quad (x \neq k\pi/2, k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x \cdot \sec x = 1 \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$
- $\sin x \cdot \csc x = 1 \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$
- $(\sec x + \tan x)^2 = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad (x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2})$
- $(\csc x + \cot x)^2 = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$
- $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $= 2\cos^2 x - 1$
 $= 1 - 2\sin^2 x$

● İKİ AÇININ TOPLAM ve FARK FORMÜLLERİ:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cot(a + b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b},$$

$$\cot(a - b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$$

● YARIM AÇI FORMÜLLERİ :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\sin a \cdot \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \vee \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \vee \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\tan 2a = \frac{2}{\cot a - \tan a}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot a - \tan a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

$$\cot^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}$$

● 3a'NIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

$$\cot 3a = \frac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^3 a - 1}$$

● 4a'NIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

$$\sin 4a = 8\sin a \cdot \cos^3 a - 4\sin a \cos a$$

$$\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$$

$$\tan 4a = \frac{4\tan a - 4\tan^3 a}{1 - 6\tan^2 a + \tan^4 a}$$

$$\cot 4a = \frac{\cot^4 a - 6\cot^2 a + 1}{4\cot^3 a - 4\cot a}$$

● 5a'NIN BAZI TRİGONOMETRİK ORANLARI

$$\sin 5a = 16\sin a \cos^4 a - 12\sin a \cos^2 a + \sin a$$

$$\cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a$$

● na'NIN BAZI TRİGONOMETRİK ORANLARI

$$\sin na = n\sin a \cos^{n-1} a - \left(\frac{n}{3}\right) \sin^3 a$$

$$\cos^{n-3} a + \left(\frac{n}{5}\right) \sin^5 a \cos^{n-5} a - \dots$$

$$\cos na = \cos^n a - \left(\frac{n}{2}\right) \sin^2 a \cos^{n-2} a$$

$$+ \left(\frac{n}{4}\right) \sin^4 a \cos^{n-4} a - \dots$$

● $\sin^4 a$ ve $\cos^4 a$ AÇILIMLARI :

$$\sin^4 a = \frac{1}{8} (\cos 4a - 4 \cos 2a + 3)$$

$$\cos^4 a = \frac{1}{8} (\cos 4a + 4 \cos 2a + 3)$$

● DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ :

□ Toplam veya fark ifadelerini çarpım şeklinde ifade etmek :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin b \sin a}$$

□ Çarpımı toplam veya fark şekline dönüştürmek .

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

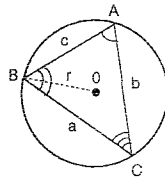
$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

● SİNÜS - KOSİNÜS ve TANJANT TEOREMLERİ :

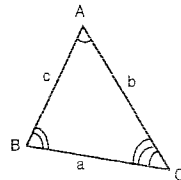
□ Sinüs Teoremi :



$$i. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

$$ii. A(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C \\ = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A \\ = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B$$

□ Kosinüs Teoremi :



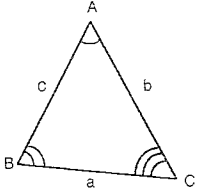
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

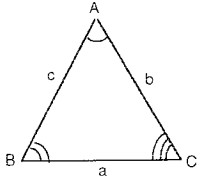
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

☐ *Tanjant Teoremi :*



$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

☐ *Mollweide Teoremi :*



$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

● Bir ABC üçgeninde, $A + B + C = 180^\circ$ ise :

$$\square \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\square \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$\square \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$\square \cot A \cdot \cot B + \cot A \cdot \cot C + \cot B \cdot \cot C = 1$$

$$\square \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{A+B}{4} \cdot \cos \frac{A+C}{4} \cdot \cos \frac{B+C}{4}$$

$$\square \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

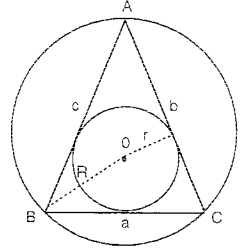
● $A+B+C = 90^\circ$ ise (A, B ve C Tümler Açılar) :

$$\square \tan A \cdot \tan B + \tan A \cdot \tan C + \tan B \cdot \tan C = 1$$

● ÜÇGENDE AÇI ve KENARLAR ARASINDAKİ TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR :

ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R, iç teğet çemberinin yarıçapı r olsun. Kenarları a, b, c olan ABC üçgeninin yarı çevresi

$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ dir. Buna göre:}$$



$$\square A(ABC) = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

$$\square A(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$\square A(ABC) = 2R^2 \cdot \sin A \sin B \sin C$$

$$\square A(ABC) = u^2 \cdot \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$$

$$\square \sin \frac{A}{2} = \frac{(u-b)(u-c)}{bc}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{u(u-a)}{bc}$$

$$\square r = (u-a) \tan \frac{A}{2} \quad r = \sqrt{\frac{(u-a)(u-b)(u-c)}{u}}$$

$$\square R = \frac{u}{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}$$

- n kenarlı bir düzgün çokgenin çevrel çemberinin yarıçapı R, içteğet çemberinin yarıçapı r, bir kenarının uzunluğu a ise

$$a = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad r = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$$A (\text{Çokgen}) = n \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$$

● TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYODU :

"f" fonksiyonu için, $f(x + T) = f(x)$ eşitliğini gerçekleyen en küçük T pozitif reel sayısına f fonksiyonunun esas periyodu denir.

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere :

$$k \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f(x) = k + m \cos^{2n-1}(ax + b)$$

$$f(x) = k + m \sin^{2n-1}(ax + b)$$

$$f(x) = k + m \cos^{2n}(ax + b)$$

$$f(x) = k + m \sin^{2n}(ax + b)$$

$$f(x) = k + m \tan^n(ax + b)$$

$$f(x) = k + m \cot^n(ax + b)$$

- Birden fazla trigonometrik fonksiyonun toplamının veya farkının esas periyodu bu fonksiyonların esas periyotlarının OKEK'idir. Çarpım veya bölüm halinde olanlar toplam veya farka dönüştürülür.

● TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER :

$\forall x \in \mathbb{R}$ için doğrulanan trigonometrik eşitliklere trigonometrik özdeşlik denir.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlanan bu ifadeler birer trigonometrik özdeşliktir.

● TRİGONOMETRİK DENKLEMLER :

Bilinmeyen trigonometrik fonksiyonun açısında olan denklemlere trigonometrik denklem denir. Trigonometrik denklem bazı reel sayı değerleri için sağlanır.

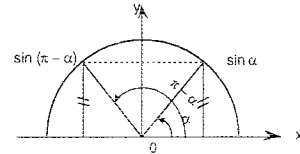
$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 3x - \sin x = 0$$

$$\tan 2x \cdot \cot x = 1$$

$\exists x \in \mathbb{R}$ için sağlanan bu ifadeler birer trigonometrik denklemdir.

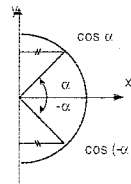
□ $\sin x = \sin \alpha$ Denkleminin Çözümü :



$\sin x = \sin \alpha$ denkleminin çözüm kümesi

$$Ç = \{2k\pi + \alpha, 2k\pi + \pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$$

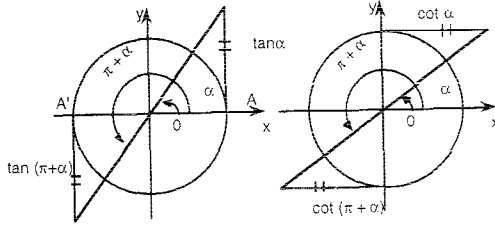
□ $\cos x = \cos \alpha$ Denkleminin Çözümü :



$\cos x = \cos \alpha$ denkleminin çözüm kümesi

$$Ç = \{2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$$

- $\tan x = \tan \alpha$ veya $\cot x = \cot \alpha$ denklemlerinin Çözümü :



$\tan x = \tan \alpha$ veya $\cot x = \cot \alpha$ denklemlerinin çözüm kümesi $\mathbb{C} : \{ k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z} \}$ dir.

- **Lineer Denklemlerin Çözümü :**

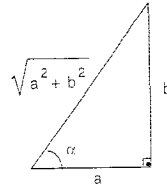
a. $\cos x + b \cdot \sin x = c$ denkleminde *Lineer Denklemler* denir. Bu denklemin çözüm kümesi aşağıda izlenen yol yardımıyla bulunur.

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$$

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a} \quad \left(\frac{b}{a} = \tan \alpha \right)$$

$$\cos x + \tan \alpha \cdot \sin x = \frac{c}{a}$$

$$\cos x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin x = \frac{c}{a}$$



$$\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\cos (x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

● TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR :

Trigonometrik fonksiyonlar reel sayılar kümesinde 1 - 1 ve örten olmadığı için belli aralıklarda tersleri bir fonksiyondur.

$$\sin y = x \Rightarrow y = \text{Arc sin } x \quad [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\cos y = x \Rightarrow y = \text{Arc cos } x \quad : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\tan y = x \Rightarrow y = \text{Arc tan } x \quad : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cot y = x \Rightarrow y = \text{Arc cot } x \quad : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

- *Ters trigonometrik fonksiyonların özellikleri :*

$$\left. \begin{aligned} \sin (\text{Arc sin } x) &= x \\ \cos (\text{Arc cos } x) &= x \\ \tan (\text{Arc tan } x) &= x \\ \cot (\text{Arc cot } x) &= x \end{aligned} \right\} \text{ f o t}^{-1}(x) = x$$

$$i. \text{ arc sin } (\sin x) = k\pi + (-1)^k x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{arc cos } (\cos x) = 2k\pi \pm x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{arc tan } (\tan x) = k\pi + x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{arc cot } (\cot x) = k\pi + x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \sin (\text{arc cos } x) &= \pm \sqrt{1 - x^2} & \cos (\text{arc sin } x) &= \pm \sqrt{1 - x^2} \\ \tan (\text{arc sin } x) &= \pm \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} & \tan (\text{arc cos } x) &= \pm \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

$$ii. \text{ Arc sin } x + \text{Arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arc tan } x + \text{Arc cot } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arc sin } (-x) = -\text{Arc sin } x$$

$$\text{Arc cos } (-x) = -\text{Arc cos } x + \pi$$

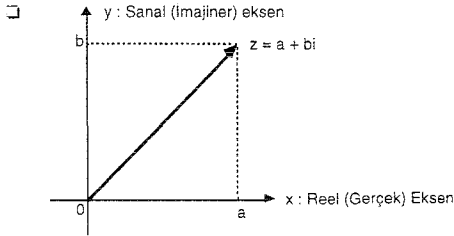
$$\text{Arc tan } (-x) = -\text{Arc tan } x$$

$$\text{Arc cot } (-x) = -\text{Arc cot } x + \pi$$

KOMPLEKS SAYILAR

18

- **KOMPLEKS SAYI** : $i = \sqrt{-1}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z = a+bi$ ifadesine kompleks (karmaşık) sayı denir. Kompleks sayı, düzlemde bir vektör belirtir. Kompleks sayılar sıralanamaz.



- a : Reel kısım, $\text{Re}(z) = a$
 b : Sanal Kısım, $\text{İm}(z) = b$
 $z = a + bi = \text{Re}(z) + i \cdot \text{İm}(z)$

● i SAYISININ KUVVETLERİ :

$$\left. \begin{array}{ll} i = \sqrt{-1} & i^5 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i \\ i^4 = +1 & i^8 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow i^{4n+k} = i^k \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

$$m \equiv k \pmod{4} \Rightarrow i^m = i^k$$

● İKİ KOMPLEKS SAYININ EŞİTLİĞİ :

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ kompleks sayılar olmak üzere :

$$z_1 = z_2 \Rightarrow a = c \text{ ve } b = d$$

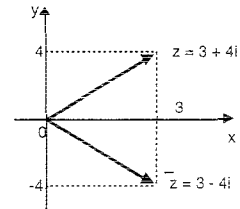
● BİR KOMPLEKS SAYININ EŞLENİĞİ :

z karmaşık sayının eşleniği $\bar{z}$ ile gösterilir.

$$z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi$$

Bir kompleks sayısının eşleniği bulunurken sanal kısmının işareti değiştirilir.

- Bir kompleks sayının eşleniği, o kompleks sayının kompleks düzlemde gösterdiği noktanın x eksenine göre simetriğidir.



- Kompleks sayının eşleniğinin eşleniği kendisidir.

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

● KOMPLEKS SAYILARDA DÖRT İŞLEM :

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ iki kompleks sayı olsun.

- **Toplama - Çıkarma** : Reel kısımlar kendi aralarında, sanal kısımlar da kendi aralarında toplanır - çıkarılır.

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- **Çarpma - Bölme** : Çarpma işleminde dağılıma özelliği; bölmede ise paydayı reel yapmak kuralı uygulanır. Paydayı reel yapmak için pay ve payda, paydanın eşleniği ile çarpılır.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac - bd + (ad + bc)i \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2} \end{aligned}$$

- **Eşlenikle Çarpma** : Sıfırdan farklı bir kompleks sayının eşleniği ile çarpımı pozitif bir reel sayı verir.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$$

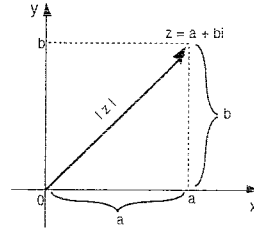
- $z = \frac{a+bi}{c+di}$ karmaşık sayısının çarpmaya göre tersi z^{-1} ise

$$z^{-1} = \frac{c+di}{a+bi} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$$

● EŞLENİK - DÖRT İŞLEM İLİŞKİLERİ :

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 : z_2} = \bar{z}_1 : \bar{z}_2$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$

● MUTLAK DEĞER ve KOMPLEKS DÜZLEM :



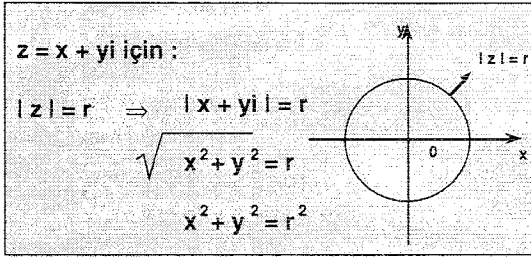
Bir kompleks sayının düzlemde gösterdiği noktanın orijine olan uzaklığına o kompleks sayının mutlak değeri (norm, modül, boy, uzunluk) denir ve $|z|$ ile gösterilir.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

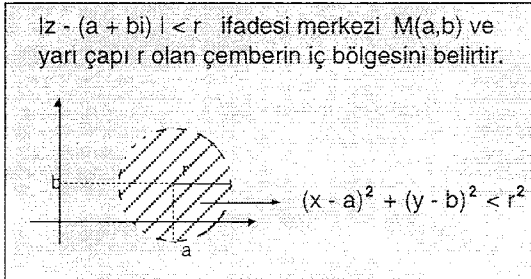
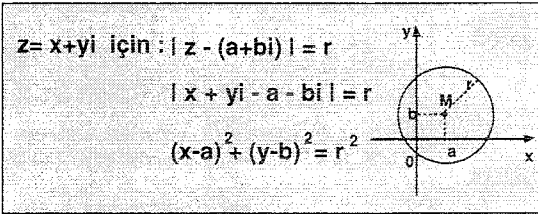
□ Özellikleri :

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ($|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$)
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$, $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$ ($z_2 \neq 0$)
- $|z_1|^n = |z_1|^n$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (üçgen eşitsizliği)

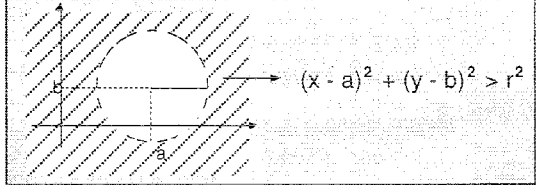
- viii. $|z| = r$ ifadesi kompleks düzlemde yarıçapı r birim olan bir merkezli çember belirtir.



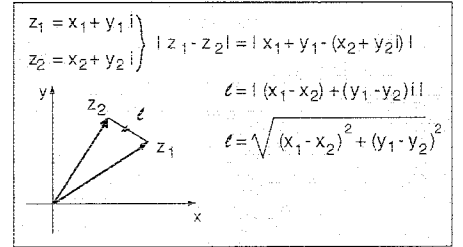
- vii. $|z - (a+bi)| = r$ ifadesi kompleks düzlemde merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r birim olan bir çember belirtir.



$|z - (a+bi)| > r$ ifadesi merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r olan çemberin dış bölgesini belirtir.



- ix. $|z_1 - z_2| = \ell$ ifadesi z_1 ve z_2 kompleks sayıları (vektörleri) arasındaki uzaklığı belirtir.



● $z = a + bi$ KARMAŞIK SAYISININ KAREKÖKLERİ :

z_0 ve z_1 karmaşık sayıları $z = a + bi$ nin karekökleri olsun.

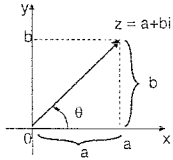
i. $b > 0$ için

$$z_0, z_1 = \pm \left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \right)$$

ii. $b < 0$ için

$$z_0, z_1 = \pm \left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} - i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}} \right)$$

● BİR KOMPLEKS SAYININ KUTUPSAL GÖSTERİMİ :



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} : \text{Modül}$$

θ : Esas Argüment

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos \theta$$

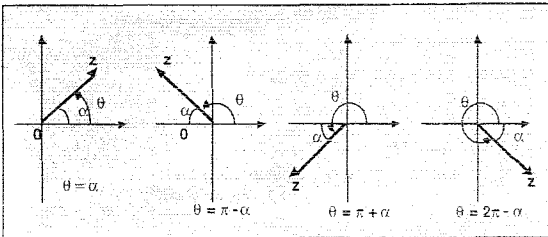
$$\sin \theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin \theta$$

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z &= r \cdot (\cos \theta + 2k\pi) + i \sin (\theta + 2k\pi) \\ z &= r \cdot \text{cis} (\theta + 2k\pi) \\ z &= r \cdot e^{z^*(\theta + 2k\pi)} \end{aligned}$$

● **ESAS ARGÜMENT** : Kompleks sayı vektörünün x eksenine pozitif yönde yaptığı açıya "argüment", bu açının (mod 360°) deki eşitine ise "esas argüment" denir.

Arg (z) = θ şeklinde gösterilir.

z kompleks sayısının dört bölgedeki durumu ve esas argümentleri aşağıda verilmiştir.



● KUTUPSAL İŞLEMLER :

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \text{ ve}$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \text{ olsun.}$$

□ **Toplama - Çıkarma** :

$$z_1 \pm z_2 = (r_1 \cos \theta_1 \pm r_2 \cos \theta_2) + (r_1 \sin \theta_1 \pm r_2 \sin \theta_2)i$$

□ **Çarpma - Bölme** : Çarpma işleminde modüller çarpılır - argümentler toplanır. Bölme ise modüller bölünür - argümentler çıkarılır.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2))$$

$$z_1 : z_2 = r_1 : r_2 (\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2))$$

□ **Üs Alma** : Üs alma işleminde modülün üssü alınır, esas argümentler üsle çarpılır.

$$z_1^n = r_1^n \cdot (\text{cis } n\theta_1) \quad n \in \mathbb{R}$$

De Moivre Formülü

● BİR KOMPLEKS SAYININ KÖKLERİ :

$$z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = r \cdot (\cos (\theta + 2k\pi) + i \sin (\theta + 2k\pi))$$

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere z karmaşık sayısının n . dereceden kökleri:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

□ Bir karmaşık sayının *karekökleri* : Kök formülünde $n = 2$ için $k = 0$ ve $k = 1$ alınırsa karekökler bulunur.

$$w_0 = \sqrt{r} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w_1 = \sqrt{r} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right]$$

□ Bir karmaşık sayının *küpkökleri* : Kök formülünde $n = 3$ için $k = 0, k = 1$ ve $k = 2$ alınırsa küpkökler bulunur.

$$w_0 = \sqrt[3]{r} \cdot \left[\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right]$$

$$w_1 = \sqrt[3]{r} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

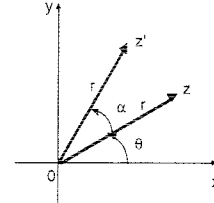
$$w_2 = \sqrt[3]{r} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

□ Bir çember üzerinde kompleks sayının n . dereceden kökleri arasında $\frac{360^\circ}{n}$ 'lık açı vardır.

● BİR KOMPLEKS SAYININ DÖNDÜRÜLMESİ :

$z = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ kompleks sayısı, kompleks düzlemde pozitif yönde " α " derece döndürüldüğünde elde edilen yeni kompleks sayı z' ise :

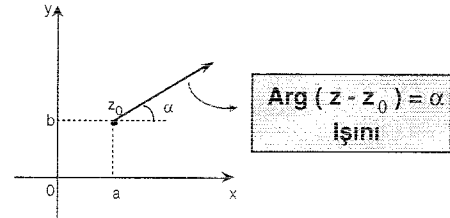
$$z' = z \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ = r \cdot \text{cis} (\theta + \alpha)$$



● KOMPLEKS SAYI - İŞİN İLİŞKİSİ :

$\text{Arg} (z - z_0) = \alpha$ ifadesi z_0 başlangıç noktasına sahip ve yatayla pozitif yönde α derecelik açı yapan bir işin belirtir.

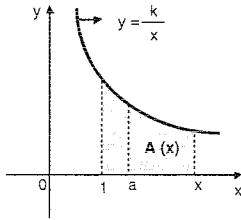
$$(z_0 = a + bi)$$



LOGARİTMA

19

- **LOGARİTMA** : $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $f(x) = \frac{k}{x}$ hiperbolü, apsisi 1 ve x olan noktalardan çizilen dikler ve Ox ekseninde kalan alana x 'in *logaritması* denir.



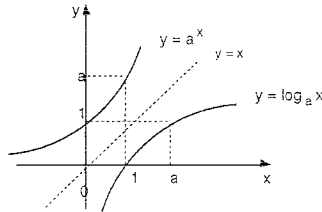
$A(x)$ alanını 1 birimkare yapan $a > 0$, $a \neq 1$ pozitif reel sayısına *logaritmanın tabanı* denir.

x 'in değişen değerleri için alan $A(x)$ ise,

$$A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x) = \log_a x \text{ tir.}$$

- **LOGARİTMA FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ** :

$y = f(x) = a^x$ üstel *fonksiyonunun tersi logaritma fonksiyonudur*. Buna göre üstel fonksiyon grafiğinin $y = x$ 'e göre *simetrisi* logaritma fonksiyonunun grafiğidir.



$$f(x) = a^x$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

Logaritma fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ dan $\mathbb{R}$ 'ye 1-1 ve örten bir fonksiyon olduğu grafiğinden görülmektedir.

- **LOGARİTMA FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ** :

□ $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere,

i.

$$A(x) = \log_a f(x) \text{ fonksiyonu,}$$

$$f(x) > 0 \text{ için tanımlıdır.}$$

$$a > 1, \log_a 0 \rightarrow -\infty \in \mathbb{R}$$

$$0 < a < 1, \log_a 0 \rightarrow +\infty \in \mathbb{R}$$

ii. $a > 1$ için logaritma fonksiyonu *artandır*.

$$A(x) = \log_a x \text{ fonksiyonu için;}$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+,$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

iii. $a > 1$ için;

$$0 < x < 1 \Rightarrow -\infty < \log_a x < 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$$

$$1 < x < \infty \Rightarrow 0 < \log_a x < \infty$$

iv. $0 < a < 1$ için logaritma fonksiyonu azalır.

$A(x) = \log_a x$ fonksiyonu için;

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

v. $0 < a < 1$ için

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < \log_a x < +\infty$$

$$x = 1 \Rightarrow \log_a x = 0$$

$$1 < x < \infty \Rightarrow -\infty < \log_a x < 0$$

vi. *Bayağı logaritma* : $\log_a x$ 'in $a = 10$ için değerine x 'in bayağı (Adi) logaritması denir.

$$a = 10 \Rightarrow \log_a x = \log x \text{ tir.}$$

vii. *Doğal logaritma* : $\log_a x$ 'in $a = e$ için değerine x 'in doğal (tabii) logaritması denir. ($e = 2,71828182844590452 \dots$)

$$\log_e x = \ln x$$

● LOGARİTMANIN KURALLARI :

□ $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $M, N \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere:

i. Logaritmanın temel özelliği;

$$\log_a M = N \Rightarrow a^N = M$$

ii.

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a M^n = n \log_a M$$

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

Uyarı :

$$\log_a (M + N) \neq \log_a (M \cdot N)$$

$$\log_a (M - N) \neq \log_a \left(\frac{M}{N} \right)$$

iii. Taban değiştirme kuralları :

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a^n b = \frac{1}{n} \log_a b = \log_a \sqrt[n]{b}$$

$$\log_a^n b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$\log_{1/a} b = \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$\log_{1/a} \frac{1}{b} = \log_a b$$

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

● BİR SAYININ BAYAĞI LOGARİTMASI :

$m \in \mathbb{Z}$ ve $n \in [0, 1)$ olmak üzere, $\log x$ 'in değeri $m + n$ ise m 'ye karakteristik, n 'ye mantis denir.

$$\log x = m + n \text{ ise } m : \text{Karakteristik} \\ n : \text{Mantis}$$

□ Karakteristik, sayının basamağı ile ilgilidir. Mantis ise logaritma cetvelinden bulunur.

$$1 < x < 10 \Rightarrow 0 < \log x < 1 \quad (\log 2 = 0,30103)$$

$$10 < x < 100 \Rightarrow 1 < \log x < 2 \quad (\log 25 = 1,39694)$$

$$100 < x < 1000 \Rightarrow 2 < \log x < 3 \quad (\log 243 = 2,38560)$$

$$(\text{Karakteristik}) = (\text{Basamak Sayısı}) - 1$$

$\log 4938 = 3, \dots$, $\log 3986405 = 6, \dots$, $\log 7 = 0, \dots$ gibi

□ 0 ile 1 arasındaki bir sayının logaritmasının karakteristiği; sayının ondalık olarak yazılışında, sıfırdan farklı ilk rakamın solundaki tüm sıfırların sayısının negatif işaretlisidir.

$$\log (0,000345) \text{'in karakteristiği } k = -4,$$

$$\log (0,07) \text{'in karakteristiği } k = -2 \text{'dir.}$$

Karakteristik negatif (-) ise, üzerine (-) işareti konur.

$$\log 0,125 = \bar{1}.09691, \quad k = -1$$

$$\log 0,00011 = \bar{4}.04576, \quad k = -4$$

● BİR SAYININ KOLOGARİTMASI :

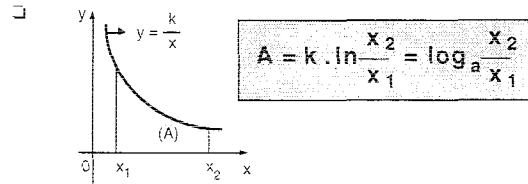
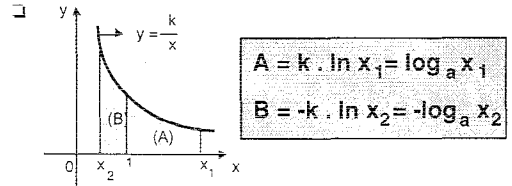
Pozitif bir reel sayının çarpmaya göre tersinin logaritmasına, bu sayının kologaritması denir.

$$x \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere, } -\log x = \text{colog} x \text{ tir.}$$

$$\begin{aligned} \text{colog} x + \log x &= \log \frac{1}{x} + \log x \\ &= -\log x + \log x \\ &= 0 \end{aligned}$$

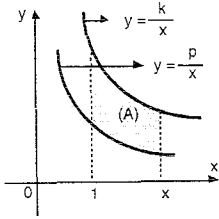
● LOGARİTMA - ALAN İLİŞKİSİ :

a taban olmak üzere:



□ a_1 : Logaritmanın $y = \frac{k}{x}$ 'e göre tabanı ve

a_2 : Logaritmanın $y = \frac{p}{x}$ 'e göre tabanı olmak üzere:



$$A = (k - p) \ln x \\ = \log_{a_1} x - \log_{a_2} x$$

PERMÜTASYON KOMBİNASYON & İHTİMAL

20

● SAYMANIN TEMEL PRENSİBİ :

Bir işlem n_1 farklı yolla, bunu izleyen her bir işlem, bir önceki işleme bağlı olarak $n_2, n_3, \dots, n_r$ farklı yolla elde edilsin. Bu işlemlerin tamamı sıralı bir şekilde;

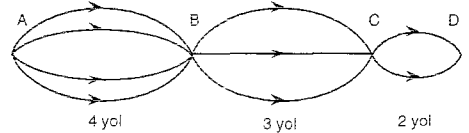
$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r \\ \text{farklı şekilde elde edilebilir.}$$

Buna saymanın temel prensibi veya genel çarpma kuralı denir.

□ $s(A) = n, s(B) = m, s(C) = p$ olsun.

$$s(A \times B) = n \cdot m,$$

$$s(A \times B \times C) = n \cdot m \cdot p \text{ dir.}$$



Örneğin, A'dan C'ye $4 \cdot 3 = 12$ farklı şekilde,

A'dan D'ye $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ farklı şekilde gidilebilir.

□ 5 ceket, 4 pantolon, 3 gömleği olan bir kişi

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ farklı şekilde giyinebilir.}$$

● FAKTÖRİYEL :

$n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}$ olmak üzere, 1'den n'ye kadar olan doğal sayıların çarpımına n faktöriyel denir ve $n!$ şeklinde gösterilir.

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

- $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, $f(0) = 1$ ve $f(1) = 1$ olmak üzere,
 $f(n) = n \cdot f(n-1)$ ifadesi faktöriyel fonksiyondur.

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

- $0! = 1$ ve $1! = 1$ olarak tanımlanır.
- $2! = 1! \cdot 2 = 2$ $6! = 4! \cdot 5 \cdot 6 = 720$
 $3! = 2! \cdot 3 = 6$ $8! = 6! \cdot 7 \cdot 8 = 40320$
 $4! = 3! \cdot 4 = 24$ $(n+1)! = (n-1)! \cdot n \cdot (n+1)$
 $5! = 4! \cdot 5 = 120$ $(2n)! = (2n-1)! \cdot 2n$

- $n!$ sayısının sonundaki sıfır sayısını bulmak için n sayısı 5'in kuvvetlerine bölünür. Her bölümden elde edilen bölümler toplamı kadar sıfır vardır.

90! 'in sonunda:

$$\begin{array}{r} 90 \overline{) 5} \\ \underline{18} \end{array} \quad \begin{array}{r} 90 \overline{) 25} \\ \underline{3} \end{array}$$

$18 + 3 = 21$ tane sıfır vardır.

Veya kısaca:

$$\begin{array}{r} 90 \overline{) 5} \\ \underline{18} \quad 5 \\ \underline{3} \end{array}$$

$18 + 3 = 21$ bulunur.

● PERMÜTASYON :

n tane elemanın bir sıra üzerinde r 'li sıralanışlarından herbirine n 'nin r 'li bir permütasyonu denir. n elemanın r 'li permütasyonlarının sayısı, $n \geq r$ olmak üzere:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ dir.}$$

- $r = n$ alındığında;

$$P(n, n) = n! \text{ olur.}$$

- **Dairesel Permütasyon** : n tane eleman bir çember etrafında

$$(n-1)! \text{ farklı şekilde sıralanır.}$$

- **Halka Permütasyonu** : n tane eleman bir halkada

$$\frac{(n-1)!}{2} \text{ farklı şekilde sıralanır.}$$

Not: Bir yuvarlak masa etrafında insanların sıralanışı dairesel permütasyona, halka biçimindeki bir anahtarlıkta, anahtarların dizilişi, halka permütasyonuna birer örnektir.

- **Tekrarlı permütasyon** : n tane eleman içerisinde n_1 tanesi 1. çeşit, n_2 tanesi 2. çeşit, n_3 tanesi 3. çeşit, ..., n_r tanesi r . çeşit ise, bu n eleman bir sıra üzerinde

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \dots n_r!} \text{ farklı şekilde sıralanır.}$$

5 mavi özdeş kaleme benzer denir.

4 özdeş süt şişesi benzerdir.

7 özdeş Türk Bayrağı benzerdir.

● KOMBİNASYON :

n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinden herbirine n 'in r 'li kombinasyonu denir. n elemanın r 'li kombinasyonlarının sayısı, $n, r \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ olmak üzere:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \text{ dir.}$$

□ Özellikleri:

- $C(n, r) = K(n, r) = C_n^r = \binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir.
- n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümeleri sayısı $n - r$ elemanlı alt kümeleri sayısına eşittir.

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$

$$C(n, 1) = C(n, n - 1) = n$$

$$C(n, 0) = C(n, n) = 1$$

$$C(n, r) + C(n, r - 1) = C(n + 1, r)$$

- n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ dir.}$$

$$\text{iv. } \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\text{v. } \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$

$$\text{vi. } \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

- Aynı düzlemdeki n tane doğrunun kesim noktaları

en çok $C(n, 2)$ tanedir.

- Aynı düzlemdeki n tane noktanın ikiye ikiye birleştirilmesiyle

en çok $C(n, 2)$ farklı doğru oluşur.

- Aynı düzlemdeki n tane noktanın ikiye ikiye birleştirilmesiyle, köşeleri bu noktalar üzerinde bulunan

en çok $C(n, 3)$ farklı üçgen oluşur.

- Aynı düzlemdeki yarıçapları farklı n tane çember

en çok $2 \cdot C(n, 2)$ farklı noktada kesişir.

- Aynı düzlemdeki n tane paralel doğrunun m tane paralel doğruyu kesmesiyle

$C(n, 2) \cdot C(m, 2)$ tane paralelkenar elde edilir.

● BİNOM AÇILIMI :

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

ifadesine Binom Açılımı denir.

□ $(a+b)^n$ ifadesinde $n+1$ terim vardır.

□ $(a + b)^n$ ifadesinde herhangi bir terim $a^p \cdot b^r$ 'li ise:

Bu terimin katsayısı $\binom{n}{p} = \binom{n}{r}$ dir.

Bu terimde $p + r = n$ dir.

□ $(a + b)^n$ açılımındaki terimler a'nın azalan kuvvetlerine göre sıralanmışsa:

Baştan $r + 1$. terim : $\binom{n}{r} \cdot a^{n-r} \cdot b^r$

Sondan $r + 1$. terim : $\binom{n}{r} \cdot a^r \cdot b^{n-r}$ dir.

□ $(a+b)^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) açılımında orta terimin katsayısı $\binom{2n}{n}$ 'dir.
 $(a+b)^{2n-1}$ açılımında orta terim yoktur.

□ $(a + b + c)^n$ açılımında $a^p \cdot b^r \cdot c^s$ 'li terimin katsayısı:

$$\frac{n!}{p! r! s!} \text{ dir. } (p + r + s = n)$$

● İHTİMALELER HESABI :

İhtimal hesabı, sonucu önceden bilinmeyen bir olayın tahmin edilmesidir. Bir zar atma olayında hangi sayının geleceğinin tahmin edilmesi bir ihtimal hesabı olduğu gibi, meteoroloji uzmanlarının hava tahminleri de birer ihtimal hesabıdır.

□ **ÖRNEK NOKTA** : Bir deneyin muhtemel sonuçlarından her birine örnek nokta denir.

□ **ÖRNEK UZAY (E)** : Bir deneyin tüm örnek noktalarının kümesine örnek uzay veya evrensel küme denir.

□ **OLAY (A)** : Örnek uzayın her bir alt kümesine olay denir ($A \subset E$).

□ **AYRIK OLAYLAR** : E örnek uzayının A ve B gibi iki olayı için $A \cap B = \emptyset$ ise, A ve B olaylarına ayrik olaylar denir. A ve B aynı anda meydana gelemeyen iki olaydır. Mesela bir zarın bir kez atılması deneyinde bir 1 gelmesi olayı ile 2 gelmesi olayı ayrik olaylardır. Çünkü bu olayların birlikte gerçekleşmeleri mümkün değildir.

□ **İMKANSIZ OLAY** : E örnek uzayında boş kümeye imkansız olay denir. ($\emptyset \subset E$ dir.)

□ **KESİN OLAY** : E örnek uzayına kesin olay denir. ($E \subset E$ dir.)

□ İHTİMAL FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ :

P ihtimal fonksiyonu, A, B, C olayları E örnek uzayının alt kümeleri olmak üzere:

i. A olayının ihtimali 0 ile 1 arasındadır.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ii. Boş kümenin ihtimali 0, örnek uzayın ihtimali 1'dir.

$$P(\emptyset) = 0 \text{ ve } P(E) = 1$$

iii. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

iv. A olayının olma ihtimali $P(A)$, olmama ihtimali $P(A')$ ise,

$$P(A) + P(A') = 1$$

$$P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \text{ dir.}$$

- v. $E = \{ A, B, C, \dots \}$ olayları örnek uzayın ikiye ikiye ayrık olayları ise

$$P(A) + P(B) + P(C) + \dots = 1 \text{ dir.}$$

- A veya B olaylarının ihtimali: $P(A \cup B)$ sembolü, A veya B olaylarından en az birinin gerçekleşme ihtimalini gösterir.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ dir.}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + (B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$$

$A \cap B = \emptyset$ ise, A ve B ayrık olaylardır. Buradan,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ dir.}$$

- vi. $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ örnek uzayında $P(e_1) = P(e_2) = P(e_3) = \dots = P(e_n)$ ise E örnek uzayına olumlu örnek uzay denir. Yani bir örnek uzayda her bir örnek noktanın gerçekleşme ihtimali birbirine eşit ise bu örnek uzaya eş olumlu örnek uzay adı verilir.

- vii. E eş olumlu örnek uzayında $n(A)$: A olayının olabileceği durumların sayısı
 $n(E)$: Örnek uzayın eleman sayısı ise,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \text{ dir.}$$

□ ŞARTLI İHTİMAL :

Bir E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun. B olayının gerçekleştiği bilindiğine göre A olayının gerçekleşmesi ihtimaline, A olayının B şartlı ihtimali denir ve $P(A|B)$ ile gösterilir.

A olayının ihtimaline, A olayının B şartlı ihtimali denir.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ dir.}$$

- Eğer E örneklerin uzayı eş olumlu örnek uzay ise

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \text{ dir.}$$

- A ve B olaylarının ihtimali: $P(A \cap B)$ sembolü, A ve B olaylarının (birlikte) gerçekleşmelerinin ihtimalini gösterir.

- Bağımsız olaylar : Bir E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun. Eğer A ve B olaylarından birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini hiçbir şekilde etkilemiyorsa A ve B olaylarına bağımsız olaylar denir. A ve B bağımsız olaylar olmak üzere A ve B olaylarının birlikte gerçekleşme ihtimali:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ dir.}$$

- Çarpım Kuralı :

Bir E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \text{ dir.}$$

- **BİNOM DAĞILIMI** : Bir deneyde bir A olayının gerçekleşme ihtimali $P(A) = p$ olsun
 Bu deney n kez tekrarlandığında A olayının r kez gerçekleşmesi ihtimali

$$C(n, r) p^r (1-p)^{n-r}$$

fomülü ile bulunur.

Örneğin, bir zar 7 kez ard-arda atılıyor. Bu atışlarda 2 kez 3 gelmesi olasılığı :

$$C(7, 2) \cdot (1/6)^5 \cdot (5/6)^2 \text{ dir.}$$

● TOPLAM SEMBOLÜ (Σ) : $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere;

$f(k) = (a_k)$ fonksiyonunun terimlerinin toplamını kısaca göstermek için Σ (sigma) sembolü kullanılır.

$$n, p \in \mathbb{Z} \text{ ve } p \leq n$$

$$\begin{array}{c} \text{üst sınır} \leftarrow n \\ \text{alt sınır} \leftarrow k = p \end{array} \quad \sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots + a_n \text{ 'dir.}$$

genel terim
indis

Verilen ifade "sigma k=p'den n'ye kadar a_k " şeklinde okunur. İndisler p'den n'ye kadar 1'er artarak gider.

□ Bu toplamdaki *terim sayısı* şöyle bulunur.

$$\begin{aligned} \text{Terim sayısı} &= \text{Üst sınır} - \text{Altsınır} + 1 \\ &= n - p + 1 \end{aligned}$$

□ Özellikleri :

$$i. \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$ii. \sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{n \text{ tane}} = n \cdot c$$

$$iii. \sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

$$iv. \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$v. \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k \quad (1 < p < n)$$

$$vi. \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=1}^{n-p+1} a_{k+p-1} \quad (\text{Sınır değiştirme kuralı})$$

$$\text{Uyarı : } \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) \neq \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k$$

□ *Toplam Sembolü Formülleri :*

$$i. \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$ii. \sum_{k=1}^n 2k = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$iii. \sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2$$

$$iv. \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$v. \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\text{vi. } \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\text{vii. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{viii. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\text{ix. } \sum_{k=p}^n \log_a \frac{k+1}{k} = \log_a \frac{n+1}{p}$$

$$\text{x. } \sum_{k=1}^n r^{n-k} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

$$\text{xi. } \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

□ Bazı Pratikler :

$$\text{i. } \sum_{k=p}^n c = (n-p+1) \cdot c \quad (\text{terim sayısı : } n-p+1)$$

$$\text{ii. } \sum_{k=p}^n (ak+b) = \left\{ (an+b) + (ap+b) \right\} \cdot \frac{n-p+1}{2}$$

Yani, aritmetik bir dizinin terimleri toplanırken, genel terimde üst sınır yazılır, alt sınır yazılır-toplanır ve bulunan değer terim sayısının yarısı ile çarpılır.

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^{12} (2k+3) &= ((2.12+3) + (2.5+3)) \cdot \frac{12-5+1}{2} \\ &= (27+13) \cdot \frac{8}{2} \\ &= 160 \end{aligned}$$

iii. $\sum_{k=0}^n P(k)$ ifadesinde $P(k)$ dizisinin k 'lı terimleri ile yapılacak işlemlerde n kullanılır. Ancak sabit terim $n+1$ ile çarpılır.

$$\sum_{k=0}^4 (3k-2) = 3 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} - 2 \cdot (4+1) = 30 - 2 \cdot 5 = 20$$

$$\sum_{k=0}^{12} (k^2+3) = \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} + 3 \cdot 13 = 650 + 39 = 689$$

iv. Verilen kalıplardaki uyuma dikkat ediniz.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

● ÇARPIM SEMBOLÜ (Π) :

$k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $f(k) = (a_k)$ fonksiyonunun terimlerinin çarpımını kısaca göstermek için (Π) sembolü kullanılır.

$$\begin{array}{c} \text{üst sınır} \leftarrow n \\ \text{alt sınır} \leftarrow k = p \\ \text{genel terim} \\ \text{indis} \end{array} \quad \prod_{k=p}^n a_k = a_p \cdot a_{p+1} \dots a_n$$

Verilen ifade "pi, k = p'den n'ye kadar a_k " şeklinde okunur. İndisler p'den n'ye kadar 1'er artarak gider.

Terim sayısı = n - p + 1 dir.

□ Çarpım Sembolünün Özellikleri :

$$i. \prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n$$

$$ii. \prod_{k=1}^n c = \underbrace{c \cdot c \cdot c \dots c}_{n \text{ tane}} = c^n$$

$$iii. \prod_{k=p}^n c = \underbrace{c \dots c}_{n-p+1 \text{ tane}} = c^{n-p+1}$$

$$iv. \prod_{k=1}^n c \cdot a_k = c^n \cdot \prod_{k=1}^n a_k$$

$$v. \prod_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=1}^n b_k$$

$$vi. \prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=p-r}^{n-r} a_{k+r} = \prod_{k=p+r}^{n+r} a_{k-r}$$

$$\prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=1}^{n-p+1} a_{k+p-1} \quad (\text{sınır değiştirme kuralı})$$

$$vii. \prod_{k=1}^n (a_k \pm b_k) \neq \prod_{k=1}^n a_k \pm \prod_{k=1}^n b_k$$

$$viii. \prod_{k=1}^n r^{a_k} = r^{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = r^{\sum_{k=1}^n a_k}$$

$$ix. \prod_{k=1}^n (a_k)^p = \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^p$$

□ Çarpım Sembolü Formülleri :

$$i. \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

$$ii. \prod_{k=1}^n k^p = \left(\prod_{k=1}^n k \right)^p = (n!)^p$$

$$iii. \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} = n+1$$

$$iv. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$v. \prod_{k=2}^n \log_k (k+1) = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \dots \log_n (n+1) \\ = \log_2 (n+1)$$

DİZİLER & LİMİT

22

- **DİZİ** : Tanım kümesi pozitif tamsayılar ve değer kümesi reel sayılar olan her fonksiyona "reel sayı dizisi" denir.

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f(n) = (a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ şeklinde gösterilir.}$$

$$(a_n): \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ dir.}$$

- Dizinin tanım kümesi : $\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, 3, \dots, n \}$.
- Dizinin değer kümesi : $\mathbb{R} = \{ \text{Gerçek Sayılar} \}$.
- Dizinin görüntü kümesi : $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$.
- a_1 : Dizinin ilk terimi
- a_n : Dizinin genel terimi veya n'inci terimi.
- $a_0 \notin (a_n), a_{-5} \notin (a_n), a_{1/3} \notin (a_n)$

Her dizi genel terimiyle bellidir. Genel terimi dizinin tanımına uymayan ifadeler bir dizi belirtmezler. Genel terimi verilmeyen reel sayı dizilerine belirsiz dizi diyebiliriz.

$$(a_n) = (1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots) \text{ bir dizedir.}$$

Fakat $(b_n) = (1, 3, 5, \dots)$ belirsiz bir dizedir. Çünkü (b_n) dizisinin genel terimini birçok şekilde ifade edebiliriz.

$$\square \text{ Bazı diziler : } (n^2 + 2n), \left(\frac{n}{n+1}\right), (n^n), (n!), ((-1)^n), (\log n), (\sqrt{n}), (\cos n), (5)$$

□ Bazı dizi olmayan fonksiyonlar :

$$\left(\frac{n+1}{n-2}\right), ((n-3)!), (\log_n n), (\sqrt{7-n}), (\tan n), ((n-2)^{n-2})$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$n \neq 2 \quad n < 3 \quad n \neq 1 \quad n > 7 \quad n \neq 90 \quad n \neq 2$$

- **EŞİT DİZİLER** : $\forall n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere:

$$a_n = b_n \Rightarrow (a_n) = (b_n)$$

Genel terimleri denk olan diziler birbirine eşittir.

- **SABİT DİZİ** : $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere:

$$(a_n) = (c) \text{ sabit dizedir.}$$

Sabit dizede,

$$a_{n+1} = a_n \text{ 'dir.}$$

- **ALT DİZİ** : Bir (a_n) dizisinin terimlerinin öncelik sırası bozulmadan bazı terimlerinden belli bir kurala göre elde edilen yeni diziye (a_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

$$(c_n): \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+ \text{ bir artan fonksiyon olmak üzere,}$$

$$(a_{c_n}) = (b_n) \text{ dir. } (c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_n)$$

- **DİZİLERDE İŞLEMLER** :

- $k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n)$
- $(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$
- $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$
- $(a_n) : (b_n) = (a_n : b_n) \quad (b_n \neq 0)$
- $(k+p)(a_n) = k(a_n) + p(a_n)$
- $k \cdot (p a_n) = p \cdot (k a_n) = k \cdot p (a_n)$

● BİR DİZİNİN MONOTONLUĞU : $\forall n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n > 0 &\Rightarrow \text{Dizi Monoton ARTAN} \\ a_{n+1} - a_n < 0 &\Rightarrow \text{Dizi Monoton AZALAN} \\ a_{n+1} - a_n = 0 &\Rightarrow \text{Dizi SABİT} \end{aligned}$$

□ (a_n) pozitif terimli bir dizi olmak üzere,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \text{Dizi Monoton ARTAN}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \text{Dizi Monoton AZALAN}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow \text{Dizi SABİT}$$

□ (a_n) dizisi için,

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow \text{Dizi AZALMAYAN}$$

$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow \text{Dizi ARTMAYAN}$$

□ $\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$ dizisinin monotonluğu pratik olarak şöyle incelenir.

- $\frac{d}{c} > 1 \Rightarrow \text{Dizi Monoton değildir.}$
- $\frac{d}{c} < 1 \Rightarrow \text{Dizi Monotondur.}$

$$\begin{aligned} 1^\circ. ad - bc > 0 &\Rightarrow \text{Monoton ARTAN} \\ 2^\circ. ad - bc < 0 &\Rightarrow \text{Monoton AZALAN} \\ 3^\circ. ad - bc = 0 &\Rightarrow \text{SABİTTİR.} \end{aligned}$$

● BİR DİZİNİN SINIRLARI (EBAS - EKÜS) :

□ **SINIRLI DİZİLER :**

i. $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists M \in \mathbb{R}, a_n \leq M$ şartı gerçekleşiyor ise (a_n) dizisi *üsten sınırlıdır* denir ve M ve M 'den büyük her sayı (a_n) dizisinin bir üst sınırıdır.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists m \in \mathbb{R}, m \leq a_n$ şartı gerçekleşiyor ise (a_n) dizisi *alttan sınırlıdır* denir ve m ve m den küçük her sayı (a_n) dizisinin bir üst sınırıdır.

iii. $\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists K \in \mathbb{R}, |a_n| \leq K$ şartı gerçekleşiyor ise (a_n) dizisi sınırlı bir dizedir. Yani (a_n) hem üstten hemde alttan sınırlı ise bu diziye sınırlı dizi adı verilir.

□ **EBAS :** $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a_n \geq m$ olacak şekilde, (a_n) dizisinin her teriminden küçük (veya eşit) en büyük bir m reel sayısı varsa m 'ye *en büyük alt sınır* denir. $\text{Ebas}(a_n) = m$ dir.

Ebas'ın dizinin terimlerinden biri olması gerekmez.

Ebas'tan küçük her reel sayı dizinin bir alt sınırıdır.

□ **EKÜS :** $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ve $M \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a_n \leq M$ olacak şekilde, (a_n) dizisinin her teriminden büyük (veya eşit) en küçük bir M reel sayısı varsa M 'ye *en küçük üst sınır* denir. $\text{Eküs}(a_n) = M$ dir.

Eküs'ün dizinin terimlerinden biri olması gerekmez.

Eküs'ten büyük her reel sayı dizinin bir üst sınırıdır.

□ Ebas'ı olan diziye "*alttan sınırlı*", Eküs'ü olan diziye de "*Üstten sınırlı*" dizi denir. Hem alttan hemde üstten sınırlı olan diziye "*sınırlı dizi*" denir.

$m \leq a_n \leq M$ ise (a_n) sınırlı bir dizedir.

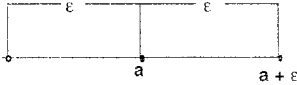
● KOMŞULUK : $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık aralığına a 'nın ε komşuluğu denir.

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

$$\begin{array}{c} + \quad -a \quad -a \quad -a \\ \hline \end{array}$$

a 'nın ε komşuluğu :



$$|x - a| < \varepsilon$$

□ (a_n) dizisinin a 'nın ε komşuluğundaki terimleri sayısı $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ veya $|a_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliği çözülerek bulunur.

□ (a_n) dizisinin a 'nın ε komşuluğu dışındaki terimlerinin sayısı $|a_n - a| \geq \varepsilon$ eşitsizliği çözülerek bulunur.

□ *Hemen her terim* : Bir dizinin sonlu sayıdaki terimleri dışında kalan terimlerine, bu dizinin hemen her terimi denir.

● BİR DİZİNİN LİMİTİ : $a \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

(a_n) dizisinin "hemen her terimi" a 'nın ε komşuluğunda ise (a_n) dizisi a 'ya yakınsıyor denir. Bir başka ifadeyle, (a_n) dizisinin, a 'nın ε komşuluğu dışında sonlu sayıda terimi kalıyorsa (a_n) dizisi a 'ya yakınsar.

$$(a_n) \rightarrow a \text{ veya } \lim (a_n) = a \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Bir dizinin limiti dizinin $n \rightarrow \infty$ daki değeridir.

□ Limiti olan diziye *yakınsak dizi*, limiti olmayan veya $\pm \infty$ olan diziye ise *ıraksak dizi* denir.

● LİMİT ALMA KURALLARI :

i. $|r| < 1 \Rightarrow \lim (r^n) = 0$

$$r = 1 \Rightarrow \lim (r^n) = 1$$

$$r > 1 \Rightarrow \lim (r^n) = +\infty$$

$$r < -1 \Rightarrow \lim (r^n) = \text{yoktur.}$$

ii. $\lim (c) = c, \quad (c \in \mathbb{R})$

iii. $P(n)$ ve $Q(n)$ n'ye bağlı birer polinom olmak üzere

$$(a_n) = \left(\frac{P(n)}{Q(n)} \right) \text{ rasyonel dizisinin limiti bulunurken}$$

$$\deg P(n) < \deg Q(n) \Rightarrow \lim (a_n) = 0$$

$$\deg P(n) = \deg Q(n) \Rightarrow \lim (a_n) = \frac{P(n)\text{'in başkatsayısı}}{Q(n)\text{'in başkatsayısı}}$$

$$\deg P(n) > \deg Q(n) \Rightarrow \lim (a_n) = +\infty$$

iv. $\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \quad \left(1 + \frac{p}{an+b} \right)^{cn+d} = e^{\frac{p \cdot c}{a}}$

$$(U_n) \rightarrow 0 \text{ ve } (V_n) \rightarrow \infty \text{ ise } \lim (1 + U_n)^{V_n} = e^{\lim U_n \cdot V_n} \text{ dir.}$$

v. (a_n) pozitif terimli ise,

$$\lim \left(\sqrt[n]{a_n} \right) = \lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

vi. $a > 0$ için $\lim \left(\sqrt[n]{an^2 + bn + c} \right) = \lim \sqrt[n]{a} \cdot \left(n + \frac{b}{2a} \right)$

($a < 0$ için limit yoktur.)

$$(a_n) \rightarrow 0 \text{ ise } \lim \frac{\sin(a_n)}{(a_n)} = 1, \quad \lim \frac{\tan(a_n)}{(a_n)} = 1$$

$$\lim \frac{(a_n)}{\sin(a_n)} = 1 \text{ ve } \lim \frac{(a_n)}{\tan(a_n)} = 1$$

(a_n) sıfırdan farklı terimlere sahip bir dizedir.

$$\text{vii. } \lim (a_n) = a \Rightarrow \lim \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) = a$$

viii. $\lim (a_n) = a$ ve (a_n) pozitif terimli bir dizi olmak üzere:

$$\lim \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \right) = a$$

ix. $\lim (a_n) = a$ ve $\lim (b_n) = a$ olmak üzere

$$a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim (c_n) = a \text{ dir. (Sandviç Teoremi)}$$

x. (a_n) sınırlı bir dizi ve $\lim (b_n) = 0$ ise

$$\lim (a_n \cdot b_n) = 0 \text{ dir.}$$

$$\text{xi. } k \neq -1 \text{ için } \lim \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

● DİZİLERDE LİMİT İŞLEMLERİ :

$\lim (a_n) = a$, $\lim (b_n) = b$, $r \in \mathbb{R}^+$ ise:

$$\square \lim (a_n \pm b_n) = \lim (a_n) \pm \lim (b_n) = a \pm b$$

$$\square \lim (a_n \cdot b_n) = \lim (a_n) \cdot \lim (b_n) = a \cdot b$$

$$\square \lim (a_n : b_n) = \lim (a_n) : \lim (b_n) = a : b \quad ((b_n) \neq 0, b \neq 0)$$

$$\square k \in \mathbb{N}^+ \text{ ise } \lim (a_n)^k = (\lim (a_n))^k = a^k$$

$$\square \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim (a_n)} = \sqrt[k]{a} \quad (k \in \mathbb{N}^+)$$

$\square (a_n)$: Pozitif terimli bir dizi ise;

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n} = \sqrt[k]{a}$$

$$\lim \log (a_n) = \log (\lim (a_n)) = \log a$$

$$\square \lim r^{(a_n)} = r^{\lim (a_n)} = r^a$$

● LİMİT TEOREMLERİ :

□ TEOREM 1.

Yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat her sınırlı dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

$$\lim (a_n) = a \Rightarrow m \leq a_n \leq M \text{ (sınırlı)}$$

$$m \leq a_n \leq M \text{ ise } \lim (a_n) \text{ olmayabilir.}$$

TEOREM 2.

□ Bir dizi yakınsak ise tüm alt dizileri de yakınsaktır. Bu durumda alt dizilerinden her birinin limiti dizinin limitine eşittir.

$c_n : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ artan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim (a_n) = a \Rightarrow \lim (a_{c_n}) = a \text{ dir.}$$

□ TEOREM 3.

Bir dizinin farklı alt dizilerinin limitleri de farklıysa bu dizinin limiti yoktur. Farklı alt dizilerin limitlerinden en küçüğüne "alt limit (infimum)", en büyüğüne de "üst limit" (supremum) adı verilir.

$$\text{Alt limit : } \underline{\lim} (a_n) = \inf (a_n),$$

$$\text{Üst limit : } \overline{\lim} (a_n) = \sup (a_n) \text{ dir.}$$

□ TEOREM 4.

Monoton artan ve üstten sınırlı her dizi yakınsaktır. Bu durumda dizinin ebas'ı ilk terimine, eküsü ise limitine eşittir.

Monoton azalan ve alttan sınırlı her dizi yakınsaktır. Bu durumda dizinin ebas'ı limitine, eküsü ise ilk terimine eşittir.

$a_{n+1} - a_n > 0 \text{ ve eküs } (a_n) = M \Rightarrow \lim (a_n) = a$ $\text{ebas } (a_n) = a_1, \text{ eküs } (a_n) = a$
$a_{n+1} - a_n < 0 \text{ ve ebas } (a_n) = m \Rightarrow \lim (a_n) = a$ $\text{ebas } (a_n) = a, \text{ eküs } (a_n) = a_1$

● CAUCHY DİZİSİ :

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \forall p \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

Bir (a_n) dizisinin belli bir n indisinden sonraki bütün terimleri $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$ şartını gerçekleştiriyorsa (a_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

□ Cauchy Dizisinin Özellikleri :

- i. Her Cauchy dizisi sınırlıdır.
- ii. (a_n) ve (b_n) birer Cauchy dizisi olmak üzere çarpım ve toplam dizileri de birer Cauchy dizisidir.
- iii. (a_n) bir Cauchy dizisi ise $(-a_n)$ dizisi de Cauchy'dir.
- iv. Eğer bir Cauchy dizisinin bir alt dizisi yakınsak ise dizinin kendisi de yakınsaktır.

ARİTMETİK & GEOMETRİK DİZİLER

23

● **ARİTMETİK DİZİ** : Ardışık her iki terimi arasındaki farkı eşit olan diziye *aritmetik dizi* denir.

r : ortak fark

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = r$$

□ $r > 0$ ise dizi artan, $r < 0$ ise dizi azalandır.

□ **GENEL TERİM** : a_1 ilk terim, ve r ortak fark olmak üzere genel terim

$$a_n = a_1 + (n - 1) r \quad \text{olur.}$$

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

$$(a_n) = (a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots, a_1 + (n - 1)r, \dots)$$

$$(a_n) = (a_1, a_1 + r, a_2 + r, \dots, a_{n-1} + r, \dots)$$

□ **PARÇA TOPLAM** : a_1 ilk terim r ortak fark ve n 'inci terimi a_n olan bir aritmetik dizinin ilk n tane terimi toplamı (kısmi toplam - parça toplam) S_n ise,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \text{ dir.}$$

Buradan

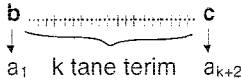
$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1)r)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)r) \text{ olur.}$$

- (a_n) aritmetik dizisinde a_k ; k'inci terim,
 a_p ; p'inci terim ise,

$$\text{Ortak Fark : } r = \frac{a_k - a_p}{k - p}, (k > p)$$

- b ile c arasında, "b ve c ile aritmetik dizi teşkil edecek şekilde" k tane terim yazılabiliyorsa:



$$\text{Ortak Fark : } r = \frac{a_{k+2} - a_1}{k + 2 - 1}$$

$$r = \frac{c - b}{k + 1}$$

- Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimler toplamı birbirine eşittir.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

- Bir aritmetik dizinin terimleri "aritmetik orta özelliğini" sağlar.

$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2, \frac{a_7 + a_{51}}{2} = a_{29}, \frac{a_6 + a_{12}}{2} = a_9$$

● **GEOMETRİK DİZİ** : Ardışık her iki teriminin oranı eşit olan diziye *geometrik dizi* denir.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \text{ (Ortak çarpan)}$$

- $r > 1$ ise dizi artan, $0 < r < 1$ ise dizi azalandır.

- **GENEL TERİM** : a_1 ilk terim, r ortak çarpan olmak üzere genel terim

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \text{ dir.}$$

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

$$(a_n) = (a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots, a_1 r^{n-1}, \dots)$$

$$(a_n) = (a_1, a_1 r, a_2 r, \dots, a_{n-1} r, \dots)$$

- **S_n : Parça Toplam** : a_1 ilk terim, r ortak çarpan olmak üzere ilk n tane terim toplamı :

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

- **Parça Çarpım** : a_1 ilk terim, r ortak çarpan olmak üzere ilk n tane terim çarpımı:

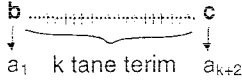
$$P_n = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}} \text{ dir.}$$

- (a_n) geometrik dizisinde; a_k , k'inci terim,

$$a_p, p'inci terim ise; (k > p)$$

$$\text{Ortak çarpan : } r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}} \text{ dir.}$$

- b ile c arasına, b ve c ile geometrik dizi teşkil edecek şekilde k tane terim yazılabiliyorsa



$$\text{Ortak çarpan : } r = \sqrt[k+2-1]{\frac{a_{k+2}}{a_1}}$$

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{c}{b}}$$

- Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki eşit uzaklıktaki terimler çarpımı birbirine eşittir.

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$$

- Bir geometrik dizinin terimleri "geometrik orta özelliğini" sağlar.

$$\sqrt{a_1 \cdot a_3} = a_2,$$

$$\sqrt{a_5 \cdot a_{11}} = a_8,$$

$$\sqrt{a_8 \cdot a_{40}} = a_{24}$$

$$\ominus ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ denkleminin kökleri :}$$

- Kökler bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi ise

$$\begin{aligned} &\text{Art.} \\ &x_1, x_2, x_3 \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2 \\ &\text{Dizi.} \\ &\Rightarrow x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \end{aligned}$$

- Kökler bir geometrik dizinin ardışık üç terimi ise

$$\begin{aligned} &\text{Geo.} \\ &x_1, x_2, x_3 \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = x_2^2 \\ &\text{Dizi.} \\ &\Rightarrow x_2 = \sqrt{x_1 \cdot x_3} \end{aligned}$$

SERİLER

24

- **SERİ** : Bir dizinin parça toplamının $n \rightarrow \infty$ için limitine *seri* denir.

(a_n) dizisinin ilk n tane terimi toplamı (S_n) ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n) \text{ olur.}$$

S_n : Kısmi toplam:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_n$$

- (S_n) : Kısmi toplam dizisi:

$$(S_n) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots)$$

- *Seri*yi şöyle de tanımlayabiliriz; *kısmi toplamlar dizisinin limitine seri* denir. Bu tanım yukarıdakinin özdeşidir.

- Bir serinin sonucu a gibi bir reel sayı ise, seri yakınsaktır denir. Eğer serinin sonucu $\pm \infty$ ise seri ıraksaktır.

$$\sum_{k=1}^n a_n = a \text{ ise seri yakınsaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm \infty \text{ ise seri ıraksaktır.}$$

- **TEOREM** : Bir seri yakınsaksa bu seriyi oluşturan dizinin limiti 0'a eşittir. Fakat bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani, bir dizinin limiti 0 ise, bu dizinin oluşturacağı seri yakınsak olmak zorunda değildir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \Rightarrow \lim (a_n) = 0$$

$$\lim (a_n) = 0 \text{ ise, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ıraksak olabilir.}$$

- **ARİTMETİK SERİ** : Bir aritmetik dizinin kısmi toplam limitine *aritmetik seri* denir. *Aritmetik seri ıraksaktır.*

$$\lim (S_n) = \lim \left(\frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)r) \right) = \pm \infty$$

- **GEOMETRİK SERİ** : Bir geometrik dizinin kısmi toplam dizisinin limitine *geometrik seri* denir. Geometrik serinin yakınsaklığı ortak çarpanına (r) bağlıdır.

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

$$\square \quad |r| > 1 \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \right) = \pm \infty \text{ (ıraksak)}$$

$$\square \quad |r| < 1 \text{ ise } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot \frac{1}{1 - r}$$

- **HARMONİK SERİ** : $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin kısmi toplam limitine *harmonik seri* denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$$

- Harmonik seri ıraksaktır.

● **BAZI SERİ KURALLARI :**

$$\square \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x$$

$$x=1 \text{ için, } 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e$$

$$x=-1 \text{ için, } 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} + \dots = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\square \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots = 1$$

$$\square \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} = \frac{nx^n}{1-x}$$

$$\square \sum_{k=1}^{\infty} k \cos kx = \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx$$

$$= \frac{(n+1) \cos nx - n \cos (n+1)x - 1}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\square \sum_{k=1}^{\infty} k \sin kx = \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + n \sin nx$$

$$= \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1)x - x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\square \sum_{k=1}^{\infty} c \cos kx = c \cos x + c \cos 2x + c \cos 3x + \dots + c \cos nx$$

$$= \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\square \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}$$

● **SERİNİN KARAKTERİNİN İNCELENMESİ :**

Bir serinin yakınsak veya ıraksaklığını incelemeye, bu *serinin karakter tayini* denir.

- **D' Alambert Kriteri (Bölme testi)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi için } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k \text{ olsun,}$$

$$1^\circ. k < 1 \text{ ise seri yakınsak}$$

$$2^\circ. k > 1 \text{ ise seri ıraksak}$$

- **Karşılaştırma (Mukayese) Kriteri**

Yakınsaklığı bilinen pozitif terimli bir seri ile, yakınsaklığı bilinmeyen pozitif terimli başka bir serinin karşılaştırılmasıyla, yakınsaklığı bilinmeyen serinin karakteri belirlenebilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \infty \text{ dur.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) \text{ Yakınsak ise } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^n}\right) \text{ yakınsaktır.}$$

- **Harmonik Seri Kriteri :**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^r}\right) \text{ serisi, } r > 1 \text{ ise yakınsak}$$

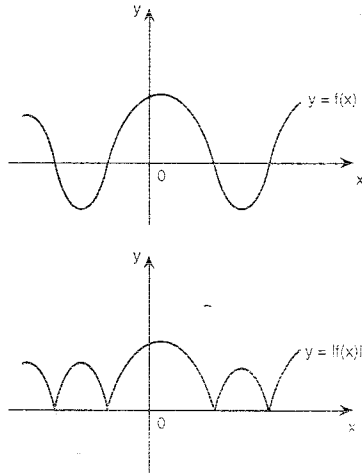
$$r \leq 1 \text{ ise ıraksak}$$

ÖZEL FONKSİYONLAR 25

● MUTLAK DEĞER FONKSİYONU :

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) , & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x) , & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

- $y = |f(x)|$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ 'in grafiğinin x eksenine göre simetridir.



● İŞARET FONKSİYONU (sgn)

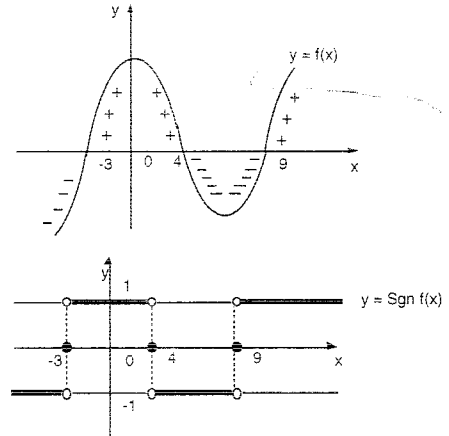
$$\text{sgn } f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$\text{sgn } f(x) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

- $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonu $f(x)$ 'in işaretiyle ilgili bir fonksiyondur. $f(x)$ pozitifse 1, $f(x)$ negatifse -1, $f(x)$ işaretsizse (sıfır ise) 0 dır.

$$\text{Sgn}(7) = 1, \text{Sgn}(-3) = -1, \text{Sgn}(x^2 + 4) = 1, \text{sgn}(\ln 1) = 0$$

- Aşağıda verilen $f(x)$ ve $\text{sgn } f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini karşılaştırınız.



● TAM DEĞER FONKSİYONU :

- x 'ten büyük olmayan en büyük tamsayıya x 'in tam değeri denir.

$$\llbracket x \rrbracket : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} , \llbracket x \rrbracket \leq x < \llbracket x \rrbracket + 1$$

$$x = 6 \Rightarrow \llbracket 6 \rrbracket = 6$$

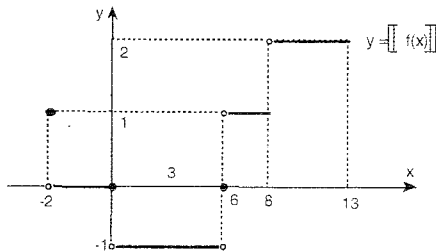
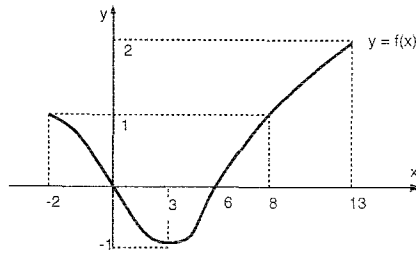
$$x = 3,8 \Rightarrow \llbracket 3,8 \rrbracket = 3$$

$$x = -4,7 \Rightarrow \llbracket -4,7 \rrbracket = -5$$

$$x = 0,9 \Rightarrow \llbracket 0,9 \rrbracket = 0$$

$$x = -0,4 \Rightarrow \llbracket -0,4 \rrbracket = -1$$

Bir reel sayı, tam değeri ile tam değerinin 1 fazlası arasındadır, veya tam değerine eşittir.



□ Tam değer fonksiyonun özellikleri:

$a \in \mathbb{Z}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere:

i. $\llbracket x \rrbracket = a \Rightarrow a \leq x < a + 1$

ii. $\llbracket -a \rrbracket = -\llbracket a \rrbracket$ veya $\llbracket a \rrbracket + \llbracket -a \rrbracket = 0$

iii. $\llbracket x + a \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + a$

iv. $\llbracket ax \rrbracket \neq a \llbracket x \rrbracket$

v. $\llbracket x \rrbracket \leq x$

$$\llbracket x + y \rrbracket \leq \llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket$$

$$\llbracket x \cdot y \rrbracket \leq \llbracket x \rrbracket \cdot \llbracket y \rrbracket$$

vi. $a > 1$ için;

$$\llbracket ax \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + \llbracket x + \frac{1}{a} \rrbracket + \llbracket x + \frac{2}{a} \rrbracket + \dots + \llbracket x + \frac{a-1}{a} \rrbracket$$

$$\llbracket 2x \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + \llbracket x + \frac{1}{2} \rrbracket$$

$$\llbracket 3x \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + \llbracket x + \frac{1}{3} \rrbracket + \llbracket x + \frac{2}{3} \rrbracket$$

$$\llbracket 4x \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + \llbracket x + \frac{1}{4} \rrbracket + \llbracket x + \frac{2}{4} \rrbracket + \llbracket x + \frac{3}{4} \rrbracket$$

vii. Eşit iki reel sayının tamdeğerleri birbirine eşittir. Fakat bunun karşısı her zaman doğru değildir. Yani tam değerleri eşit olan reel sayıların birbirlerine eşit olmaları gerekmez.

$$x, y \in \mathbb{R}, \quad x = y \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = \llbracket y \rrbracket$$

$$\llbracket x \rrbracket = \llbracket y \rrbracket \not\Rightarrow x = y$$

viii. $\llbracket \frac{ax+b}{n} \rrbracket = m$ eşitliğinde $a \neq 1$ ise, bu eşitliği gerçekleyen n tane tam sayı değeri vardır. ($n, b, m \in \mathbb{Z}$)

ii. $y = \lfloor f(x) \rfloor$ fonksiyonun grafiği çizilirken y 'nin tamsayı değerlerini alabilmesi için x 'in değişen aralıkları :

i. $y = \lfloor ax \rfloor$ ise $\frac{1}{|a|}$ farkla artar.

ii. $y = \lfloor x^2 \rfloor$ ise karesi alındığında tamsayı veren değerlerle artar. $(0, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{3}, 2\sqrt[4]{5}, \dots)$ gibi.

iii. $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ ise karekökü alındığında tamsayı veren değerlerle artar. $(0, 1, 4, 9, 16, \dots)$

FONKSİYONLARDA LİMİT ve SÜREKLİLİK

26

● FONKSİYONUN LİMİTİ :

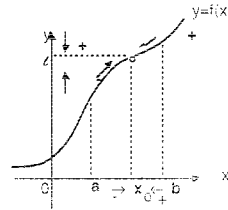
$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)$. $A - \{x_0\}$ 'dan $\mathbb{R}$ 'ye tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

Reel x değişkeni $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yaklaşıırken $f(x)$ fonksiyonu ℓ reel sayısına yakınsıyorsa, ℓ reel sayısına x değişkeni x_0 sayısına yaklaşıırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti denir.

$$f : A - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ dir.}$$

● SAĞDAN ve SOLDAN LİMİT :



$$A = (a, b)$$

$$x_0 \in (a, b)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

ii. Reel x değişkeni bir $x_0 \in (a, b)$ noktasına; (x_0, b) aralığında azalan değerler alarak (sağdan) yaklaşıırken, $f(x)$ fonksiyonu ℓ_1 reel sayısına yakınsıyorsa, ℓ_1 reel sayısına $f(x)$ 'in, x değişkeni x_0 sayısına yaklaşıırken sağdan limiti denir.

$$f : (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \text{ dir.}$$

- Reel x değişkeni bir $x_0 \in (a, b)$ noktasına; (a, x_0) aralığında artan değerler alarak (soldan) yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu ℓ_2 reel sayısına yakınsıyorsa, ℓ_2 reel sayısına $f(x)$ 'in x değişkeni x_0 sayısına yaklaşırken soldan limiti denir.

$$f : (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \text{ dir.}$$

□ SONUÇ :

- $f(x)$ fonksiyonunun, x reel değişkeni $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yaklaşırken sağdan ve soldan limitleri eşitse $f(x)$ 'in x_0 noktasında limiti vardır.
- $f(x)$ fonksiyonunun, x reel değişkeni $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yaklaşırken sağdan ve soldan limitleri eşit değilse $f(x)$ 'in x_0 noktasında limiti yoktur.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ell_1 = \ell_2 \text{ ise limit var} \\ \ell_1 \neq \ell_2 \text{ ise limit yok} \end{array}$$

□ SONUÇ :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ ise x reel değişkeni $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu c reel sayısına yakınsar denir.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ ise x değişkeni $x_0 \in \mathbb{R}$ sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonu $\pm \infty$ a yakınsar denir.

● LİMİTLERLE İŞLEMLER :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c \in \mathbb{R})$
- $P(x)$ bir polinom fonksiyon olmak üzere;
 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (k \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $g(x) \neq 0$ ve $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ için
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) : g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) : \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[r]{f(x)} = \sqrt[r]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \quad (r > 0)$
- m tek doğal sayı veya $f(x_0) \geq 0$ ise :
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$
- $f(x_0) > 0$ ise :
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log f(x)) = \log (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$

● BELİRSİZLİKLER ve BAZI ÖZEL LİMİTLER :

□ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ limitinde, $x=x_0$ için $f(x_0)$ ifadesinin

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 \text{ gibi}$$

belirsizlik halleriyle karşılaşabilirsiniz. Bu tür belirsizlikler L'Hospital yöntemi kullanılarak çözülebilirler.

□ *Bazı özel limitler :*

$$i. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

iii. $a > 0$ olmak üzere :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$iv. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1}$$

$$v. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$vi. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{\frac{x}{p} \cdot p} = e^p$$

$$vii. \lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \begin{cases} 0 & , |r| < 1 \text{ ise} \\ 1 & , r = 1 \text{ ise} \\ +\infty & , |r| > 1 \text{ ise} \end{cases} \text{ yoktur, } r \leq -1 \text{ ise}$$

viii. $r > 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{r^x} = 0$$

$$ix. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{r^x}{x!} = 0$$

$$x. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p}{1+r^x} = \begin{cases} p & , |r| < 1 \text{ ise} \\ \frac{p}{2} & , r = 1 \text{ ise} \\ 0 & , |r| > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$xi. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|, (a > 0)$$

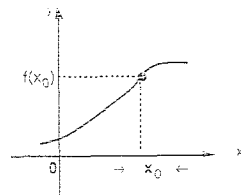
$$i. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px^m + kx^{m-1} + \dots}{qx^n + tx^{n-1} + \dots} = \begin{cases} 0 & , m < n \text{ ise} \\ \frac{p}{q} & , m = n \text{ ise} \\ \pm \infty & , m > n \text{ ise} \end{cases}$$

● FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ :

□ *Nokta için süreklilik :*

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ise $f(x)$ fonksiyonu x_0 apsisli noktasında süreklidir denir.



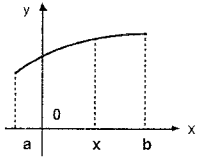
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

□ Bir f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için :

- Fonksiyon, x_0 noktasında tanımlı olmalıdır.
- Fonksiyonun x_0 noktasında, sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit olmalıdır.
- Fonksiyonun x_0 noktasındaki limiti, o noktadaki değeriyle eşit olmalıdır.

□ **Aralıkta süreklilik :**

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x)$ fonksiyonu yukarıdaki şartı sağlıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında süreklidir denir.



$\forall x \in [a, b]$ için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

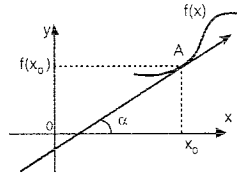
● TÜREV

- i) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. $x_0 \in (a, b)$ noktasında sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti bir reel sayı ise, bu reel sayıya $f(x)$ fonksiyonunun x_0 apsisi noktasındaki *teğetin eğimi* veya *türevi* denir ve f'

(x_0) veya $\frac{df}{dx}(x_0)$ şeklinde gösterilir.



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

● SÜREKLİLİK TEOREMLERİ :

□ **TEOREM 1 :**

$[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir f fonksiyonu sınırlıdır.

□ **TEOREM 2 :**

$[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir f fonksiyonunun maksimum veya minimum değerleri bu aralıktadır.

$$\left. \begin{array}{l} \max f([a, b]) = M \\ \min f([a, b]) = m \end{array} \right\} f([a, b]) = [m, M] \text{ dir.}$$

- ii) $h = \Delta x = x - x_0$ ve

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

limiti reel sayı ise bu reel sayıya $f(x)$ fonksiyonunun $x \in (a, b)$ için *türevi* denir.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

❑ **AÇIKLAMA:** i ve ii deki formüller özdeştir. i den hareket ederek ii elde edilebilir.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ ifadesinde}$$

$$x - x_0 = h \Rightarrow x \rightarrow x_0 \text{ için } h \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

$$x - x_0 = h \Rightarrow x = x_0 + h \text{ dir.}$$

Bu ifadeler yukarıdaki formülde yerine yazılırsa :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

● TÜREVLEME KURALLARI :

i. $c \in \mathbb{R}$, $f(x)$ ve $g(x)$ türevli fonksiyonlar olmak üzere :

$y = c$	$\Rightarrow y' = 0$
$y = f^n(x)$	$\Rightarrow y' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$
$y = \sqrt[m]{f(x)}$	$\Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{m \sqrt[m]{f(x)^{m-1}}}$

$y = k \cdot f(x)$	$\Rightarrow y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) + g(x)$	$\Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$\Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}, (g(x) \neq 0)$
$y = \frac{1}{f(x)}, (f(x) \neq 0)$	$\Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

$y = \sin f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$
$y = \cos f(x) \Rightarrow y' = -f'(x) \cdot \sin f(x)$
$y = \tan f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot (1 + \tan^2 f(x))$ $= \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$ $= f'(x) \cdot \sec^2 f(x)$
$y = \cot f(x) \Rightarrow y' = -f'(x) \cdot (1 + \cot^2 f(x))$ $= \frac{-f'(x)}{\sin^2 f(x)}$ $= -f'(x) \cdot \csc^2 f(x)$
$y = \sec f(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot \sec f(x) \cdot \tan f(x)$
$y = \csc f(x) \Rightarrow y' = -f'(x) \cdot \csc f(x) \cdot \cot f(x)$
$y = \log_a f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \log_a e$
$y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$
$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$y = y^{f(x)} \Rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{f'(x) g(x)}{f(x)} \right]$

$$y = \text{Arc sin } f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$y = \text{Arc cos } f(x) \Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$y = \text{Arc tan } f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$y = \text{Arc cot } f(x) \Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 - 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2}$$

$$y = \log x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log e$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow y' = 0$$

$$y = x^{\frac{1}{m}} \Rightarrow y' = \frac{1}{m \cdot \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \text{Arc sin } x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{Arc cos } x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{Arc tan } x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \text{Arc cot } x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

- ii. Yukarıda verilen kurallar yardımıyla bulunan bazı özel fonksiyonların türevleri aşağıda verilmiştir.

● MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ :

$$y = |f(x)| \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot |f(x)|$$

● KAPALI FONKSİYON ve TÜREVİ :

$f(x,y) = 0$ fonksiyonuna kapalı fonksiyon denir.

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow y' = f'(x,y) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

$y' = -\frac{y \text{ sabit } x\text{'e göre türev}}{x \text{ sabit } y\text{'e göre türev}}$

● DİFERANSİYEL ve YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV :

$$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (\text{Türev})$$

$$\Rightarrow dy = f'(x) dx \quad (\text{Diferansiyel})$$

$$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (f'(x)) = f''(x)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} (f''(x)) = f'''(x)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d}{dx} (f^{(n-1)}(x)) = f^{(n)}(x)$$

Yani $y = f(x)$ fonksiyonunun n'inci mertebeden türevi :

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

□ Bazı özel fonksiyonların yüksek mertebeden türevleri :

$$y = f(x) \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

$$y = x^n \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = n!$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$y = \sin ax \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = a^n \cdot \sin \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$y = \cos ax \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = a^n \cdot \cos \left(ax + \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$y = \ln x \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$y = a^x \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = a^x \cdot (\ln a)^n$$

$$y = e^{ax} \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = a^n \cdot e^{ax}$$

$$y = e^x \Rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = e^x$$

● BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ :

(Türevde zincir kuralı)

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(t) \\ t = h(z) \end{array} \right\} \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}$$

$$y = f(g(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y = f(g(h(x))) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

● PARAMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ :

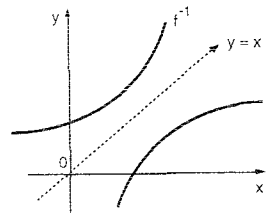
$$\left. \begin{array}{l} y = f(t) \\ x = g(t) \end{array} \right\} \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t) dt}{g'(t) dt}$$

$$= \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

● TERS FONKSİYONUN TÜREVİ :

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

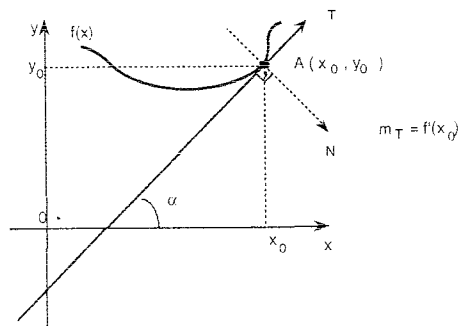
$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$$



● TÜREVİN UYGULAMALARI :

i. Teğet ve Normal Denklemleri :

$y = f(x)$ fonksiyonu $A(x_0, y_0)$ noktasında türevli bir fonksiyon ise $f(x)$ fonksiyonunun, $A(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetinin eğimi, o noktadaki türevine eşittir.



□ Teğete teğetik noktasında dik olan doğruya eğrinin o noktadaki *normali* denir.

m_T ve m_N sırasıyla teğet ve normalin eğimleri olmak üzere : $m_T \perp m_N \Rightarrow m_T \cdot m_N = -1$

$$f'(x_0) \cdot m_N = -1$$

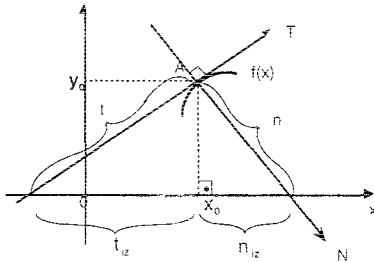
$$m_N = \frac{-1}{f'(x_0)}$$

□ Bu durumda $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen

Teğet Denklemi : $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Normal Denklemi : $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

ii. Teğet ve Normalin Uzunluk Bağlılıkları:



$f(x)$ 'in $x = x_0$ apsisi noktasındaki teğeti T, normali N ve türevi $f'(x_0)$ ise :

Teğet uzunluğu : $t = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cdot \sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}$

Normal uzunluğu : $n = f(x_0) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}$

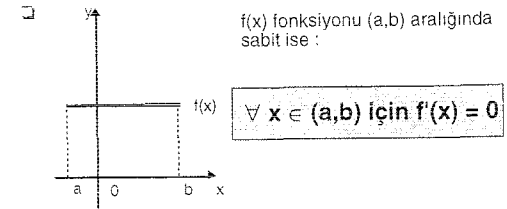
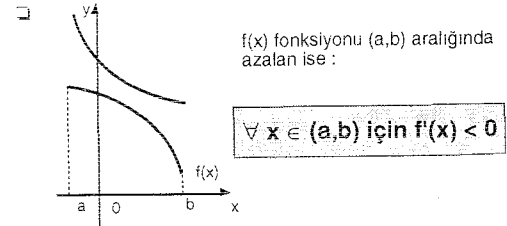
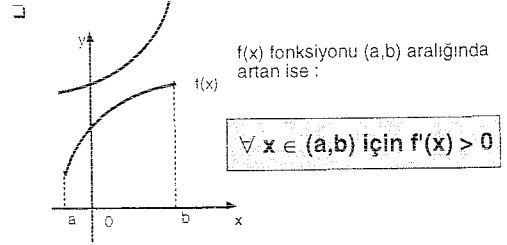
Teğetin izdüşüm uzunluğu : $t_{iz} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Normalin izdüşüm uzunluğu :

$$n_{iz} = f(x_0) \cdot f'(x_0)$$

iii. Artan ve Azalan Fonksiyonlar :

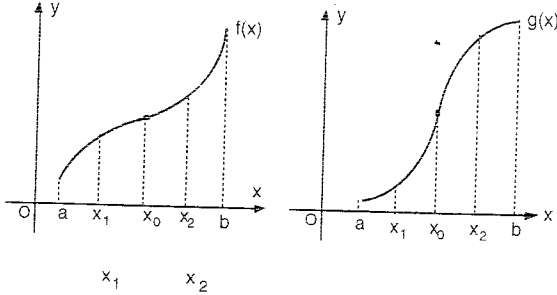
f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli olmak üzere;



2°- $x \in (a, x_0)$ için $f'(x) > 0$ ve $f'(x_0) = 0$ ise, fonksiyonun çukurluğu (x_0, b) aralığında yukarı bakar.

Sonuç:

- (a, b) aralığında 2. türevi olan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonla $x=x_0$ 'da dönüm noktasına sahip ise, aşağıdaki ifadeler doğrudur.



$$f'(x_1) < 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

$$f'(x_2) > 0$$

$$f'(x_1) > 0$$

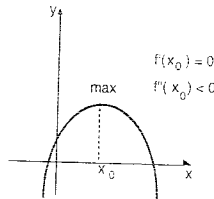
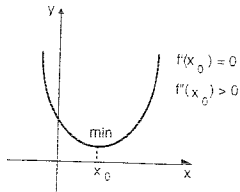
$$f'(x_0) = 0$$

$$f'(x_2) < 0$$

- Bir fonksiyonun yerel ekstremum noktasında

1°- 2. türevi (+) ise bu noktada yerel minimum,

2°- 2. türevi (-) ise bu noktada yerel maximum değerleri vardır.



- 2. türevin 0'a eşit olduğu noktada fonksiyon işaret değiştiyorsa, bu noktada fonksiyonun dönümü yoktur.

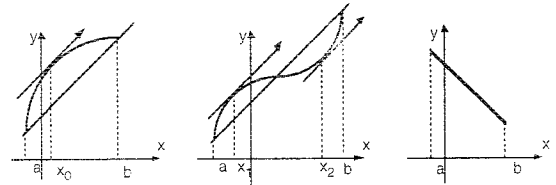
Örneğin: $f(x)=x^4$ eğrisi için $f'(x)=4x^3=0$ olup $x_0=0$ da ikinci türev sıfırdır. $12x^2$ fonksiyonu bu noktada işaret değiştirmedikten $f(x)$ 'in $x_0=0$ 'da dönümü yoktur.

vi. Ortalama Değer Teoremi :

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevli ise,

$$\exists x_0 \in (a,b) \text{ için } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

vii. Rolle Teoremi :



$x_0 \in (a,b)$
ortalama değer
teoremini sağlar.

$x_1, x_2 \in (a,b)$
ortalama değer
teoremini sağlar.

$\forall x \in (a,b)$
ortalama değer
teoremini sağlar.

viii. Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri :

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonuna *rasyonel fonksiyon* denir.

- ┐ **Asimptot** : Eğrinin sonsuzda teğet olduğu doğruya veya eğriye **asimptot** denir.
- ┐ **Düşey Asimptot** :

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunda $Q(x) = 0$ 'ın köklerine **Düşey Asimptot** denir.

- ┐ **Düşey Asimptotun özellikleri** :

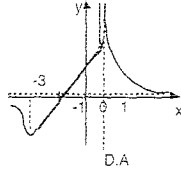
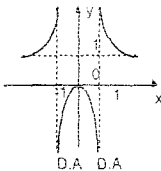
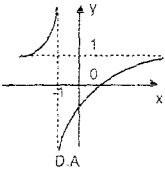
1°- Eğri düşey asimptotu kesmez.

Örneğin;

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$



Grafiklerden eğrinin düşey Asimptotları kesmediği görülür.

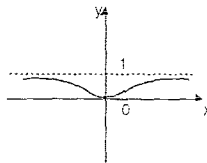
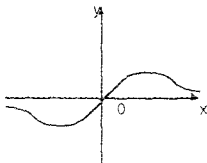
2°- Düşey asimptot n tane ise eğri n+1 parçalıdır.

Yukarıdaki grafiklerden bu kuralı izleyiniz.

3°- Düşey asimptot yoksa eğri parçasız (süreklî) dir.

$$y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

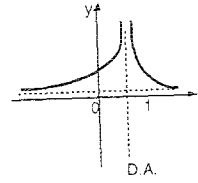
$$y = \frac{x^2}{x^2+4}$$



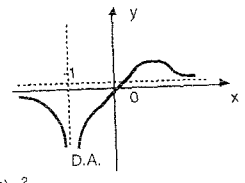
4°- Rasyonel fonksiyonun paydası tamkare ise ($Q(x)$ tamkare) fonksiyon düşey asimptot ile aynı yönden sonsuza gider (veya gelir.)

Örneğin;

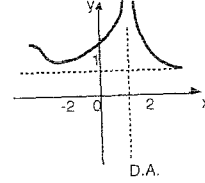
$$y = \frac{1}{(x-1)^2}$$



$$y = \frac{x}{(x+1)^2}$$



$$y = \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^2$$



- ┐ **Yatay Asimptot ve Özellikleri** :

Fonksiyonun $x \rightarrow \infty$ için limitine **yatay asimptot** denir.

Yatay asimptot,
 $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$
doğrusudur.

1°- **Yatay asimptot**, payın derecesi paydanın derecesinden küçük veya paydanın derecesine eşit ise vardır.

Örneğin;

$$* y = \frac{2x}{x^2 - 1} \text{ eğrisinin yatay asimptotu,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \text{ olduğundan, } y = 0 \text{ doğrusudur.}$$

$$* y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} \text{ eğrisinin yatay asimptotu,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} = 2 \text{ olduğundan, } y = 2 \text{ doğrusudur.}$$

2°- Payın derecesi paydanınkinden büyük ise *yatay asimptot yoktur.* (limit sonsuzdur.)

Bu durumda fonksiyonun *eğik* veya *eğri* asimptotu vardır.

3°- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eğrisi yatay asimptotu kesebilir.

□ *Eğik ve Eğri Asimptot :*

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesinde, $P(x)$ 'in derecesi $Q(x)$ 'in derecesinden büyük ise *eğik* veya *eğri* asimptot vardır.

1°- Derece farkı 1 ise, asimptot eğik asimptottur.

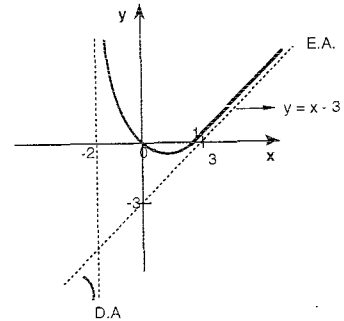
Örneğin;

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 2}$$

fonksiyonunun eğik asimptotu vardır.

□ *Bulunuşu :* Pay paydaya bölünür, bölüm eğik asimptot fonksiyonudur.

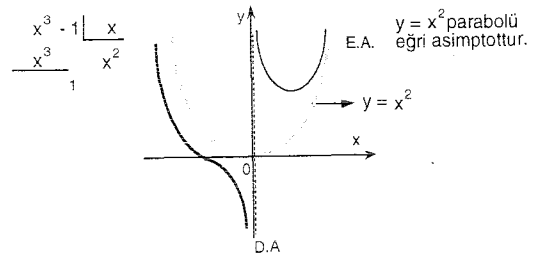
$$\begin{array}{r|l} x^2 - x & x + 2 \\ \hline \pm x^2 \pm 2x & x - 3 \\ \hline -3x & \\ \pm 3x \pm 6 & \\ \hline 6 & \end{array} \quad y = x - 3 \text{ doğrusu eğik asimptottur.}$$



2°- Derece farkı 1'den çok ise asimptot, eğri asimptottur.

Örneğin;

$y = \frac{x^3 - 1}{x}$ fonksiyonunun eğri asimptotunu bulalım



ix. L' Hospital Kuralı :

f ve g fonksiyonları $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve (a, b) aralığında türevli olmak üzere :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (g'(x_0) \neq 0)$$

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ belirsizliklerine L' Hospital kuralı uygulanır.

□ L'Hospital'in bazı uygulamaları :

$$1^\circ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{qx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{\sin qx} = 0$$

$$2^\circ - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan px}{qx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{\tan qx} = \frac{p}{q}$$

$$3^\circ - \lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$4^\circ - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$5^\circ - \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1}$$

$$6^\circ - a > 0 \text{ olmak üzere } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$7^\circ - a > 1 \text{ ve } n \in \mathbb{N} \text{ ise :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$$

$$8^\circ - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = 0$$

İNTEGRAL ve UYGULAMALARI

28

● İNTEGRAL FONKSİYONU :

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı iki fonksiyon olsun.

$\forall x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$ 'e $f(x)$ 'in *ilkel fonksiyonu* veya *integral fonksiyonu* denir.

$$y = F(x) \Rightarrow dy = f(x)dx$$

$$\int dy = \int f(x)dx$$

$$y = \int f(x)dx$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

□ Belirsiz integral :

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

$\int$: Integral sembolü

$f(x)$: Integrant

C : Integral sabiti.

□ $\int f(x)dx$ sembolü " $f(x)$ 'in x 'e göre integrali" anlamına gelir. $f(x)$ belli iken $F(x)$ 'i bulma işlemine *integral alma işlemi*, $F(x) + c$ ifadesine *$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali* denir.

$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = \left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$
$\frac{d}{dt} \left[\int f(x) dx \right] = f(x) \frac{dx}{dt}$
$\int dt f(x) = f(x) + c$

□ Belirli (Sınırlı) integral :

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \\ = F(b) - F(a)$$

Yukarıda **b** üst sınır, **a** alt sınırdır.

● İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ :

$f(x)$ ve $g(x)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olsun.

$$\square \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\square \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx, k \in \mathbb{R}$$

$$\square \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, a < c < b$$

$$\square \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\square \int_a^a f(x) dx = 0$$

● TEMEL İNTEGRAL FORMÜLLERİ :

$$1. \int dx = x + c$$

$$2. \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c = a^x \log_a e + c$$

$$6. \int e^x dx = e^x + c$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin } x + c = -\text{Arc cos } x + c \quad (|x| < 1)$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tan } x + c = -\text{Arc cot } x + c$$

● İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ :

□ *Değişken Değiştirme Metodu :*

$\int f(x) \cdot f'(x) dx$ tipi integraller alınırken $u = f(x)$ dönüşümü yapılarak, $u = f(x)$ ve $d(u) = f'(x) dx$ ifadeleri integralde yerlerine yazılırsa

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \int u \cdot du$$

$$= \frac{u^2}{2} + c \quad (u = f(x))$$

$$= \frac{f^2(x)}{2} + c \text{ elde edilir.}$$

$$\int f(x) f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} + C$$

Genel olarak :

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

□ *Kısmi İntegral Metodu :*

$[f(x), g'(x)]$ tipi integraller alınırken bu metod kullanılır.

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)] - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\text{veya } u = f(x) \quad v = g(x)$$

$$du = f'(x) \quad dv = g'(x)$$

dönüşümleri sonucunda

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = u \cdot v - \int v \cdot du \quad \text{eşitliği elde edilir.}$$

Aşağıdaki iki durum için verilen kısmi integral metodu kullanılabilir. $f(x)$ bir polinom fonksiyon olmak üzere :

$$a) \int f(x) \cdot \begin{cases} a^{mx+n} \\ \sin(mx+n) \\ \cos(mx+n) \end{cases} dx \quad \text{hallerinde}$$

$$u = f(x) \quad \text{ve} \quad dv = \begin{cases} a^{mx+n} \\ \sin(mx+n) \\ \cos(mx+n) \end{cases} dx$$

seçimi yapıp $f(x)$ polinomunun derecesi kadar kısmi integral işlemi uygulanır

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_a(mx+n) \\ \arcsin(mx+n) \\ \arccos(mx+n) \\ \arctan(mx+n) \\ \operatorname{arccot}(mx+n) \end{array} \right\} f(x) dx \quad \text{integrallerinde ise :}$$

$$u = \begin{cases} \log_a(mx+n) \\ \arcsin(mx+n) \\ \arccos(mx+n) \\ \arctan(mx+n) \\ \operatorname{arccot}(mx+n) \end{cases} \quad \text{ve} \quad dv = f(x) dx$$

dönüşümleri yapılarak kısmi integral işlemi uygulanır.

□ *Tabular İntegral :*

Kısmi integral metodunun uygulandığı integral hesaplamalarında tabular integral metodu işlemlerde pratiklik sağlar. Bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek : $\int x^3 e^x dx$ integralini hesaplayınız.

$$\text{Türevi alınır} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^3 \\ 3x^2 \\ 6x \\ 6 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \\ + \end{array} \begin{array}{l} e^x \\ e^x \\ e^x \\ e^x \\ e^x \end{array} \right\} \quad \text{integrali alınır}$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x + c \text{ dir.}$$

Dikkat edilirse x^3 ifadesinin türevini aldıkça sonuçta sıfır elde edilir. Ok yönünde çarpıp, + ve -'ler boyunca toplama ve çıkarma işlemi yaptığımız zaman integralin sonucunu kolayca elde ederiz.

● Basit Kesirli İfadelere Ayırma Metodu :

$P(x)$ m.dereceden $Q(x)$, n .dereceden bir polinom olmak üzere, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelerin integral hesaplamalarında bu metod kullanılabilir.

1. DURUM : $m \geq n$ ise (payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşit) $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna bölünerek integral hesaplanır.

Örneğin; $\int \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} dx$ integrali polinom bölmesinden

sonra $\int \left((x + 2) + \frac{2}{x + 2} \right) dx$ halini alır.

2. DURUM : $m < n$ ise (paydanın derecesi payın derecesinden büyük) paydada aşağıda verilmiş dört tip fonksiyon bulunabilir.

1. tip : Payda birinci dereceden fonksiyonların çarpımından oluşmuş ise

$$\frac{P(x)}{(a_1x + b_1) \dots (a_nx_n + b_n)} = \frac{A_1}{a_1x_1 + b_1} + \dots + \frac{A_n}{a_nx_n + b_n}$$

eşitliğinden $A_1, A_2, \dots, A_n$ değerleri bulunarak integral alınır.

2. tip : Paydada birinci dereceden bir fonksiyonun n dereceden üssü var ise

$$\frac{P(x)}{(ax + b)^n} = \frac{A_1}{(ax + b)^n} + \frac{A_2}{(ax + b)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^1}$$

eşitliğinden $A_1, A_2, \dots, A_n$ değerleri bulunarak integral hesaplanır.

3. tip : Payda, çarpanlarına ayrılmayan ikinci dereceden fonksiyonların çarpımından oluşmuş ise

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1) \dots (a_nx^2 + b_nx + c_n)} = \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

eşitliğinden $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n$ değerleri bulunup integral hesaplanır.

4. tip : Paydada, çarpanlarına ayrılmayan ikinci dereceden bir fonksiyonun m dereceden kuvveti var ise

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

eşitliğinden $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, B_m$ değerleri bulunup integral hesaplanır.

□ Bazı rasyonel fonksiyonların integralleri :

$$1. \int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$$

$$3. \int x(ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+2}}{a^2(n+2)} - \frac{b(ax + b)^{n+1}}{a^2(n+1)} + c \quad (n \neq -1, -2)$$

$$4. \int \frac{x dx}{ax + b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln |ax + b| + c$$

$$5. \int \frac{x \, dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \ln |ax+b| + c$$

$$6. \int \frac{x \, dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{b}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} - \frac{1}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} \right] + c$$

$$7. \int \frac{x^2 \, dx}{ax+b} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{(ax+b)^2}{2} - 2b(ax+b) + b^2 \ln |ax+b| \right] + c$$

$$8. \int \frac{x^2 \, dx}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^3} \left[ax+b - 2b \ln |ax+b| - \frac{b^2}{ax+b} \right] + c$$

$$9. \int \frac{a^2 \, dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a^3} \left[\ln |ax+b| + \frac{2b}{ax+b} - \frac{b^2}{2(ax+b)^2} \right] + c$$

$$10. \int \frac{x^2 \, dx}{(ax+b)^n} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{(n-3)(ax+b)^{n-3}} + \frac{2b}{(n-2)(ax+b)^{n-2}} - \frac{b^2}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} \right] + c$$

$$11. \int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + c$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + c$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -a \left[\frac{1}{b^2(ax+b)} + \frac{1}{ab^2x} - \frac{2}{b^3} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| \right] + c$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc} \cot \frac{x}{a} + c$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + c$$

$$16. \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc} \tan \left(\sqrt{\frac{2ax+b}{4ac-b^2}} \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{4ac-b^2}}{2ax+b+\sqrt{4ac-b^2}} \right| + c \\ (4ac-b^2 > 0)$$

$$17. \int \frac{x \, dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$18. \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} \\ + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$19. \int \frac{x \, dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c} \ln \left| \frac{x^2}{ax^2+bx+c} \right| - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

● KÖKLÜ İFADELERİN İNTEGRALİ :

Köklü fonksiyonların integrallerinin hesaplanmasında

eğer $a+bx$, $a+bx^2$ gibi ifadeler var ise

$\sqrt[n]{a+bx} = u$ veya $\sqrt[n]{a+bx^2} = u$ değişken değişimi uygulanarak çözüme gidilir.

☐ Bir integral ifadesi "a";

$$\sqrt{a^2-x^2} \text{ bulunuyorsa } x = a \sin \alpha \text{ veya } x = a \cos \alpha$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \text{ bulunuyorsa } x = a \sec \alpha$$

$$\sqrt{x^2+a^2} \text{ bulunuyorsa } x = a \tan \alpha \text{ dönüşümü yapılır.}$$

□ Bazı Köklü İfadelerin İntegraleri

$$1. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin \frac{x}{a}) + c$$

$$2. \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$3. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2} dx}{x} = a^2 - x^2 - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + c$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$6. \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + c)$$

$$7. \int x \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \cdot \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + c$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

$$10. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$$

$$12. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + c$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 + x} + c$$

$$14. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|) + c$$

$$15. \int x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + c$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos \frac{a}{x} + c$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + c$$

$$18. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + c$$

$$19. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|) + c$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \ln \left| 2 \sqrt{a(ax^2 + bx + c)} + 2ax + b \right|$$

● TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ :

Trigonometrik ifadeler içeren fonksiyonların integralleri alınırken aşağıdaki 3 durumda karşılaşılabılır. Bu durumları inceleyiniz.

1. DURUM : $\int P(\sin x, \cos) dx$

Bu tip trigonometrik fonksiyonların integrali alınırken

$\tan \frac{x}{2} = u$ dönüşümü yapılır.

$$\begin{aligned} u &= \tan \frac{x}{2} \\ dx &= \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin x &= \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos x &= \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{aligned}$$

Aşağıdaki verilmiş trigonometrik fonksiyon integralleri ve dönüşümleri işlemlerde pratiklik sağlar.

i. $\int P(\sin x) \cos x dx$

$\sin x = u$, $\cos x dx = du$ dönüşümü yapıp $\int P(\sin x) \cos x dx = \int P(u) du$ integrali elde edilir.

ii. $\int P(\cos x) \sin x dx$

$\cos x = u$, $\sin x dx = -du$ dönüşümü yapıp $\int P(\cos x) \sin x dx = -\int P(u) du$ integrali elde edilir.

iii. $\int P(\tan x) dx$

$\tan x = u$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$ dönüşümü yapıp

$\int P(\tan x) dx = \int \frac{P(u)}{1+u^2} du$ integrali elde edilir.

iv. $\int P(\sin x, \cos x) dx$ ($\sin x$ ve $\cos x$ in yalnız çift kuvvetleri var)

$\tan x = u \Rightarrow x = \arctan u$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}$$

$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$$

Bu değerler integralde yerine yazılırsa rasyonel bir fonksiyonun integrali elde edilir.

2. DURUM : $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ($m, n \in \mathbb{Z}$)

Bu integrali m ve n 'in farklı durumlarına göre inceleyelim.

i. m ve n 'den biri tek, diğeri çift sayı :

Tek olandan bir tanesi ayrılır. Geride kalan diğeri cinsinden ifade edilir ve basit değişken değiştirme kuralı uygulanır. Örneğin;

$$I = \int \cos^{2m} x \cdot \sin^{2n+1} x dx \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$= \int \cos^{2m} x \cdot (1 - \cos^2 x)^n \cdot \sin x dx$$

$u = \cos x$ ve $du = -\sin x dx$ dönüşümü yapılırsa

$$I = - \int t^{2m} (1 - t^2)^n du \text{ integrali elde edilir.}$$

ii. m ve n 'nin her ikisi de tek sayı :

Herhangi birinden bir tanesi çekilir, geriye kalan, diğeri cinsinden ifade edilerek basit değişken değiştirme ile integral hesaplanır.

$$I = \int \cos^{2n+1} x \cdot \sin^{2m+1} x \, dx \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

$$= \int \cos^{2n+1} x \cdot \sin^{2m} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^{2n+1} x (1 - \cos^2 x)^m \cdot \sin x \, dx$$

$u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$ dönüşümü yapılırsa

$$I = - \int u^{2n+1} \cdot (1 - u^2)^m \, du \text{ integrali elde edilir.}$$

3. DURUM : $\int \cos mx \cos nx \, dx$ ve $\int \sin mx \sin nx \, dx$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m+n)x - \cos (m-n)x]$$

formülleri yardımıyla bu tip integraller kolayca alınabilir.

❏ Bazı Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri :

$$1. \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$2. \int \sin^n ax \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax \cdot \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx$$

$$3. \int x \sin ax \, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cdot \cos ax}{a} + c$$

$$4. \int x^n \cdot \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$$

$$5. \int \frac{\sin ax}{x} \, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

$$6. \int \frac{\sin ax}{x^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} \, dx$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \frac{ax}{2} \right| + c$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$$

$$9. \int \frac{dx}{1 \pm \sin ax} = \frac{1}{a} \tan \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{4} \right) + c$$

$$10. \int \frac{x dx}{1 \pm \sin ax} = \frac{x}{a} \tan \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$11. \int \frac{x dx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \cot \left(\frac{x}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right|$$

$$+ \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right|$$

$$12. \int \frac{\sin ax \, dx}{1 \pm \sin ax} = \pm x + \frac{1}{a} \tan \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{ax}{2} \right) + c$$

$$13. \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$14. \int \cos^n ax \, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \cdot \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, dx$$

$$15. \int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a} + c$$

$$16. \int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx$$

$$17. \int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln |x| \cdot \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

$$18. \int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} dx$$

$$19. \int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$$

$$21. \int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + c$$

$$22. \int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + c$$

$$23. \int \frac{x dx}{1 + \cos ax} = -\frac{x}{a} \tan \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \left| \cos \frac{ax}{2} \right| + c$$

$$24. \int \frac{x dx}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \cot \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \left| \sin \frac{ax}{2} \right| + c$$

$$25. \int \frac{\cos ax dx}{1 + \cos ax} = x \cdot \frac{1}{a} \cdot \tan \frac{ax}{2} + c$$

$$26. \int \frac{\cos ax dx}{1 - \cos ax} = -x \cdot \frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + c$$

$$27. \int \frac{dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \left| \tan \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) \right| + c$$

$$28. \int \frac{dx}{(\cos ax \pm \sin ax)^2} = \frac{1}{2a} \tan \left(ax \pm \frac{\pi}{4} \right) + c$$

$$29. \int \frac{\cos ax dx}{\cos ax \pm \sin ax} = \frac{1}{2a} [\pm ax + \ln |\cos ax \pm \sin ax|] + c$$

$$30. \int \frac{\sin ax}{\cos ax \pm \sin ax} dx = \pm \frac{1}{2a} [ax \pm \ln |\cos ax \pm \sin ax|] + c$$

$$31. \int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + c$$

$$32. \int \tan^n ax dx = \frac{1}{a(n-1)} \tan^{n-1} ax - \int \tan^{n-2} ax dx + c$$

$$33. \int \frac{\tan^n ax dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a(n+1)} \tan^{n+1} ax + c$$

$$34. \int \frac{dx}{\tan ax \pm 1} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax| + c$$

$$35. \int \frac{\tan ax dx}{\tan ax \pm 1} = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2a} \ln |\sin ax \pm \cos ax| + c$$

$$36. \int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + c$$

$$37. \int \cot^n ax dx = \frac{1}{a(n)} \cot^{n-1} ax - \int \cot^{n-3} ax dx$$

$$38. \int \frac{\cot^n ax dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a(n+1)} \cot^{n+1} ax + c$$

$$39. \int \frac{dx}{1 \pm \cot ax} = \int \frac{\tan ax dx}{\tan ax \pm 1}$$

└ Bazı Üstel Fonksiyonların İntegralleri :

$$1. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$2. \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + c$$

$$3. \int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + c$$

$$4. \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$5. \int \frac{e^{ax}}{x} dx = \ln|x| + \frac{ax}{1 \cdot 1!} + \frac{a^2 x^2}{2 \cdot 2!} + \dots$$

$$6. \int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx \right) \dots$$

$$7. \int e^{ax} \ln|x| dx = \frac{1}{a} (e^{ax} \ln|x| - \int \frac{e^{ax}}{x} dx)$$

$$8. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$$

$$9. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c$$

$$10. \int e^{ax} \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \sin bx - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx$$

$$11. \int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos bx + n \sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x dx$$

└ Bazı Logaritmik Fonksiyonların İntegralleri :

$$1. \int \ln x dx = x (\ln x - 1) + c$$

$$2. \int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c$$

$$3. \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx \quad (n \neq 1)$$

$$4. \int \frac{dx}{(\ln x)} = \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$5. \int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$6. \int x^m \ln x dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) + c \quad (m \neq -1)$$

$$7. \int x^m \ln x^n dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx \quad (m, n \neq -1)$$

$$8. \int \frac{(\ln x)^n dx}{x} = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + c$$

$$9. \int \frac{\ln x dx}{x^m} = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} + c \quad (m \neq 1)$$

$$10. \int \frac{(\ln x)^n dx}{x^m} = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{(\ln x)^{n-1} dx}{x^m} \quad (m \neq 1; n \neq -1)$$

$$11. \int \frac{x^m dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$12. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln x| + c$$

$$13. \int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln |\ln x| - (n-1) \ln x + \frac{(n-1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(n-1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$14. \int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = \frac{1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$$

$$15. \int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c$$

$$16. \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + c$$

$$17. \int e^{ax} \ln x dx = \frac{1}{a} (e^{ax} \ln x - \int \frac{e^{ax}}{x} dx)$$

$$7. \int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arccot \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + c$$

$$8. \int x \arccot \frac{x}{a} dx = \frac{a^2 + x^2}{2} \arccot \frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + c$$

$$9. \int x^2 \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + c$$

$$10. \int x^n \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx + c \quad (n \neq -1)$$

● İNTEGRAL TEOREMLERİ :

□ İntegralin Ortalama Değer Teoremi :

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon ve (a, b) aralığına ait en az bir c reel sayısı için

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c) \text{ dir.}$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

değerine f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değeri denir.

□ İntegralin Temel Teoremi :

$[a, b]$ aralığında tanımlı ve (a, b) aralığında türevli $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları için :

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$f(x)$ veya $g(x)$ ten herhangi biri sabit fonksiyon ise $f'(x) = 0$ veya $g'(x) = 0$ olacağına dikkat ediniz.

□ Bazı Ters Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri :

$$1. \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$2. \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$3. \int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x^2 + 2a^2}{9} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

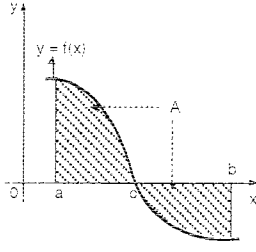
$$4. \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$5. \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

$$6. \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{x^2 + 2a^2}{9} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

● DÜZLEMSSEL BÖLGELERİN ALANLARININ HESABI :

- 1) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ sürekli fonksiyonunun eğrisi x eksenini ve denklemleri $x = a$, $x = b$ olan doğrular ile sınırlı bölgenin alanı A ise,



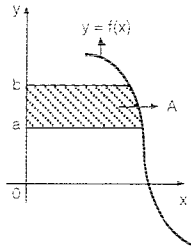
$$A = \int_a^b |f(x)| dx \text{ dir.}$$

$a < x < c$ için $f(x) > 0$ ve $c < x < b$ için $f(x) < 0$ ise,

$$A = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \text{ dir.}$$

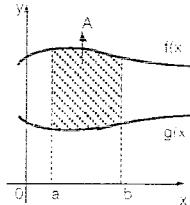
- 2) Denklemleri $y = f(x)$ olan eğri y eksenini ve denklemleri $y = a$, $y = b$ olan doğrularla sınırlı bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |x| dy \text{ dir.}$$



- 3) f ve g fonksiyonlarının eğrileri ve denklemleri $x = a$, $x = b$ olan doğrular ile sınırlı bölgenin alanı

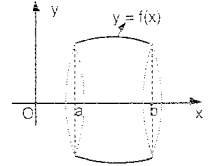
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ dir.}$$



● DÖNEL CİSİMLERİN HACMİ :

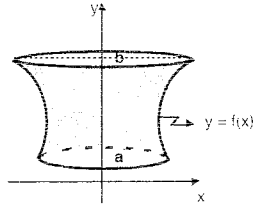
- 1) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ sürekli fonksiyonunun eğrisi, x eksenini ve denklemleri $x = a$, $x = b$ olan doğrular ile sınırlı bölge x eksenini etrafında 360° döndürüldüğünde oluşan dönel cismin hacmi

$$H = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_a^b y^2 dx \text{ dir.}$$



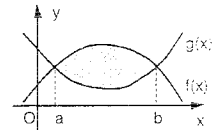
- 2) Denklemleri $y = f(x)$ olan eğri, y eksenini etrafında 360° döndürülürse oluşan dönel cismin hacmi :

$$H = \pi \int_a^b x^2 dy \text{ dir.}$$



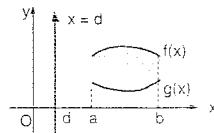
- 3) İki eğri arasında kalan alanın x eksenini etrafında 360° döndürülmesinden elde edilen cismin hacmi :

$$H = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

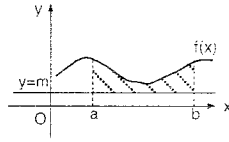


- 4) $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı alanın $x = d$ doğrusu etrafında dönmesinden meydana gelen cismin hacmi :

$$H = 2\pi \int_a^b (x - d) (g(x) - f(x)) dx$$



- 5) $y = f(x)$ eğrisi ile $y = m$, $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $y = m$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi :



$$H = \pi \int_a^b (f(x) - m)^2 dx \text{ dir.}$$

● DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI :

$y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırladığı alanın

- 1) Ox eksenini etrafında dönmesinden meydana gelen dönel cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_a^b y \, ds$$

- 2) Oy eksenini etrafında dönmesinden meydana gelen dönel cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 2\pi \int_c^d x \, ds$$

- 3) $y = k$ doğrusu etrafında dönmesinden meydana gelen dönel cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_a^b (x - k) \, ds \text{ dir.}$$

- 4) $x = k$ doğrusu etrafında dönmesinden meydana gelen cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_a^b (y - k) \, ds$$

● İKİ KATLI İNTEGRALLE DÜZLEM ALANLARININ HESABI :

- 1) Kartezyen koordinatlarında :

$$F = \int_a^b \int_{\psi(x)}^{f(x)} dy \, dx \quad \text{veya} \quad \int_c^d \int_{h(y)}^{\Psi(y)} dx \, dy \text{ dir.}$$

● İKİ KATLI İNTEGRALLE HACİM HESABI :

$z = f(x, y)$ ise :

$$V = \int_a^b \int_{h(x)}^{\Psi(x)} f(x, y) \, dy \, dx \quad \text{veya} \quad \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \, dy \text{ dir}$$

● ÜÇ KATLI İNTEGRALLE HACİM HESABI :

Kartezyen koordinatlarda :

$$V = \iiint dx \, dy \, dz \text{ dir.}$$

● YÜZEYLERİN ALANI :

$z = f(x, y)$ yüzeyinin alanı :

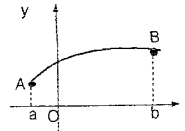
$$F = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dy \, dx \text{ dir.}$$

● BİR EĞRİNİN YAY UZUNLUĞU :

$y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasındaki $\widehat{AB}$ yayının uzunluğu :

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

integrali ile bulunur.



MATRİSLER

29

● MATRİS

$m, n \in \mathbb{N}^+$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ve $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, m tane satır ve n tane sütundan oluşan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

şeklindeki tabloya $m \times n$ boyutlu bir matris denir. m tane satır ve n tane sütundan oluşan bir A matrisi $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösterilir.

□ $m, n \in \mathbb{N}^+$, $0 < i < m$ ve $0 < j < n$ olmak üzere,

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisinde

m : satır sayısı
 n : sütun sayısı
 i, j : indis

● SATIR MATRİSİ :

Tek bir satırdan oluşan matrise *satır matrisi* denir. A bir satır matrisi ise :

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]_{1 \times n}$$

● SÜTUN MATRİSİ :

Tek bir sütundan oluşan matrise *sütun matrisi* denir. A bir sütun matrisi ise :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

● KARE MATRİS :

Satır ve sütun sayısı eşit olan ($m=n$) matrise *kare matris* denir.

□ $n \times n$ boyutlu bir kare matrisi aşağıdaki gibidir :

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Esas Köşegen

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

kare matrislerdir.

● ESAS KÖŞEĞEN :

$n \times n$ boyutlu bir kare matrisin $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$ sayılarının bulunduğu köşegene matrisin *esas köşegen* denir.

● BİRİM MATRİS :

Esas köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer elemanları sıfır olan kare matrislere *birim matris* denir.

□ $n \times n$ boyutlu bir $I_{n \times n}$ birim matrisi aşağıdaki gibidir :

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Örnek :

$$I_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{ve} \quad I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

birim matrislerdir.

● SIFIR MATRİS :

Bütün elemanları sıfır olan matrise *sıfır matris* denir. $A_{m \times n}$ bir sıfır matris ise aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{ve} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

sıfır matrislerdir.

● SİMETRİK MATRİS : Elemanları esas köşegene göre simetrik olan matrise *simetrik matris* denir.

 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ simetrik matris ise:

$$i \neq j \text{ için} \\ a_{ij} = a_{ji} \text{ dir.}$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi simetriktir.

● TERS SİMETRİK MATRİS :

Esas köşegen elemanları sıfır, esas köşegene göre simetrik elemanlarının oranı -1 olan kare matrislere *ters simetrik matris* denir. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ters simetrik ise :

$$i = j \text{ için } a_{ii} = 0, \\ i \neq j \text{ için } a_{ij} = -a_{ji} \text{ dir.}$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \text{ ters simetrik matristir.}$$

● İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ :

Karşılıklı bütün elemanları eşit olan, aynı boyutlu iki matris birbirine eşittir. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ iki matris olmak üzere

$$0 \leq i \leq m \text{ ve } 0 \leq j \leq n \text{ için} \\ A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ dir.}$$

● MATRİSLERDE TOPLAMA-ÇIKARMA :

 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ aynı boyutlu iki matris olmak üzere

$$A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}]_{m \times n} \\ = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

Not : Farklı boyuttaki matrisler toplanıp çıkartılamaz.

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ ise}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1+3 & 1+0 & 2+1 \\ 2+0 & 1+1 & 2+0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ olur.}$$

□ **Toplam ve fark işleminin özellikleri :**

1° $A+B = B+A$	(Değişme özeliği)
2° $A+(B+C) = (A+B)+C$	(Birleşme özeliği)
3° $A+0 = 0+A = A$	(0 : Sıfır matris)
4° $A+(-A) = (-A) + A = 0$	
$(-A : A'nın toplamaya göre tersi)$	

● **BİR MATRİSİN SKALER İLE ÇARPIMI :**

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ bir matris ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere :

$$k.A = k \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [k.a_{ij}]_{m \times n} \text{ dir.}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ için $2.A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ olur.

□ A ve B aynı türden iki matris ve $k, p \in \mathbb{R}$ olmak üzere :

1° $k(A+B) = k.A + k.B$
2° $(k+p)A = k.A + p.A$
3° $k.(p.A) = (k.p).A$

A, B ve C aynı türden matrisler olmak üzere :

● **İKİ MATRİSİN ÇARPIMI :**

$m \times n$ boyutlu $A_{m \times n}$ matrisi ile $k \times p$ boyutlu $B_{k \times p}$ matrisinin çarpılabilmesi için $n = k$ olması gerekir.

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ olmak üzere $C = A.B$ matrisi olan

$C = [c_{ik}]_{m \times p}$ matrisi :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \text{ dir.}$$

$(0 < i \leq m, 0 < k \leq p)$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{ise } C = A.B \text{ matrisi;}$$

$$c_{11} = 1.1 + 2.1 = 3 \quad c_{12} = 1.1 + 2.2 = 5 \quad c_{13} = 1.1 + 2.1 = 3$$

$$c_{21} = 2.1 + 3.1 = 5 \quad c_{22} = 2.1 + 3.2 = 8 \quad c_{23} = 2.1 + 3.1 = 5$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ bulunur.}$$

□ **Matrislerde Çarpma işleminin özellikleri :**

1° A ve B birim matristen farklı matris olmak üzere ; $A.B \neq B.A$
2° $A.(B.C) = (A.B).C$
3° $A.(B+C) = A.B + A.C$
4° $A.B = 0$ ise $A = 0$ veya $B = 0$ olması gerekmez.
5° $A.I = I.A = A$
6° $A.B = B$ ise A 'nın birim matris olması gerekmez.

● **KARE MATRİSİN KUVVETİ :**

$A_{n \times n}$ bir kare matris olmak üzere;

$A^0 = I$	$A^m = A.A^{m-1}$
$A^1 = A$	$A^m \cdot A^p = A^{m+p}$
$A^2 = A.A$	$(A^{p,k}) = A^{p,k}$

Birim matrislerin bütün kuvvetleri kendisine eşittir.

$$I^n = I$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise: } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n.a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $A^{55} = \begin{bmatrix} 1 & 110 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

● BİR MATRİSİN DEVRİĞİ (TRANSPOZESİ) :

Bir matrisin aynı numaralı satırıyla sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen matrise, bu matrisin devriği (Transpozesi) denir. A'nın devriği A^T veya A^D ile gösterilir.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \text{ise} \quad A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ise $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

□ Transpozenin Özellikleri :

A, B birer matris ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere :

1°. $(A^T)^T = A$
2°. $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$
3°. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4°. $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$
5°. $A = A^T$ ise A : Simetrik matristir
6°. $A = -A^T$ ise A : Ters-simetrik matristir

● **DETERMINANT** : Reel sayılarla oluşturulan bütün kare matrislerin kümesi M olsun. M kümesinden, reel sayılar kümesine tanımlanan bir $D : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, kare matrisi eşlediği reel sayıya, bu kare matrisin *determinantı* denir. Bir A matrisinin determinanı $\det(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir.

□ Bir $A = [a_{ij}]_{1 \times 1}$ matrisinin determinanı :

$$\det(A) = |A| = a$$

□ Bir $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ matrisinin determinanı :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow (-) \text{ yedek köşegen} \\ \searrow (+) \text{ esas köşegen} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Örnek : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ise $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$

□ Bir $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ matrisinin determinanı (Sarrus kuralı) :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0 + (-2) + 0 - (-1) - 0 = -2 + 1 = -1$$

┐ Minör (Alt Determinant) :

Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinin a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun dışında kalan elemanların oluşturduğu matrisin determinantına a_{ij} teriminin minörü denir ve M_{ij} ile gösterilir.

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{ise} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1 \cdot 2) = 4 \text{ tür.}$$

┐ Kofaktör (Eş Çarpan) :

Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin a_{ij} teriminin minörünün $(-1)^{i+j}$ ile çarpımına a_{ij} elemanının kofaktörü denir ve A_{ij} ile gösterilir. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir kare matris, M_{ij} , a_{ij} teriminin minörü olmak üzere :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \text{ dir.}$$

$$\text{Örnek : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{ise} \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 3) = 1 \text{ dir.}$$

┐ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin determinanı, herhangi bir satır veya sütundaki elemanlar ile kofaktörlerinin çarpımlarından elde edilen sayıların toplamıdır.

$$\text{Örnek : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ise}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 0 - 2 = -1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

┐ Determinantın Özellikleri :

1° Bir determinantın herhangi bir satır veya sütununun tüm elemanları sıfır ise determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Örnek : } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ dir.}$$

2° Bir determinantın iki satır veya sütundaki elemanlar karşılıklı olarak orantılı ise determinantın değeri sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & d & k \cdot a \\ b & e & k \cdot b \\ c & f & k \cdot c \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Örnek : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{ise} \quad |A| = 0 \text{ dir.}$$

3° Bir determinantın tüm satır elemanlarıyla tüm sütun elemanları karşılıklı olarak yer değiştirdiğinde determinantın değeri değişmez.

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\begin{aligned} \text{Örnek : } A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{ise} \quad |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \\ |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \end{aligned}$$

4° Bir determinanın iki satır veya iki sütunu kendi aralarında yer değiştirirse determinanın işareti değişir.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e \\ a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$$

Örnek : $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$ ise $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

5° Bir determinanın herhangi bir satırı veya sütununun $k \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpılması, bu determinanın değerinin $k \in \mathbb{R}$ ile çarpılması demektir.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Örnek : $A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$ ise $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 - 3) = -2$$

6° Bir determinanın herhangi bir satır veya sütunu $k \in \mathbb{R}$ ile çarpılıp başka bir satır veya sütuna eklenirse determinanın değeri değişmez.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+cd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix}$$

Örnek : $k = 2$, $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}_{2 \times 2}$ ise $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

$$= \begin{vmatrix} 1+2 \cdot 3 & 2+2 \cdot 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 12 = -5$$

7° İki kare matrisin çarpımının determinanı, matrislerin determinantları çarpımına eşittir. A ve B $n \times n$ boyutlu iki matris olmak üzere ;

$$\begin{aligned} |A \cdot B| &= |A| \cdot |B| \\ |A^n| &= |A|^n \end{aligned}$$

Örnek :

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ ve } B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ ise}$$

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \text{ ve}$$

$$|A \cdot B| = 7 \cdot 8 - 6 \cdot 6 = 20 \text{ dir.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

$$|A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 = 20 \text{ dir. Buradan,}$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \text{ yazılabilir.}$$

8°

$$\begin{vmatrix} a+k & b+p & c+r \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & p & r \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

● EK MATRİS (Adjoint Matris) :

A bir kare matris olmak üzere A'nın her a_{ij} elemanı yerine o eleman eş çarpanı (kofaktörleri) konularak bulunan matrisin devrigne (transpozese) A'nın ek matrisi denir ve

$E_k(A)$ veya A^E ile gösterilir. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir kare matris olmak üzere:

$$E_k(A) = [A_{ij}]^T_{n \times n} = [A_{ji}]_{n \times n}$$

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ ise :}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |3| = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |4| = -4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |2| = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |1| = 1$$

$$Ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ bulunur.}$$

● BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ :

A ve B matrisleri $m \times n$ türünde iki matris olsun.

$A.B = B.A = I_{n \times n}$ eşitliğini sağlayan B matrisine A'nın tersi veya A matrisine B'nin tersi denir. A'nın tersi A^{-1} ile gösterilir. A, $n \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . Ek(A), \quad |A| \neq 0$$

□ PRATİK KURAL :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersi :}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0$$

● BİR MATRİSİN RANKI :

Bir $A_{m \times n}$ matrisinin alt matrisleri arasında, determinantı sıfırdan farklı olanlardan derecesi en büyük olanın derecesine A matrisinin rankı denir ve $Rank(A)$ ile gösterilir.

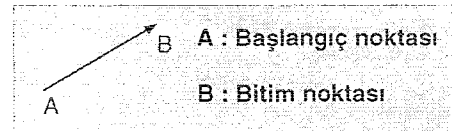
VEKTÖRLER

30

● YÖNLÜ DOĞRU PARÇASI :

Uç noktalarından biri başlangıç, diğeri bitim noktası olan doğru parçasına *yönlü doğru parçası* denir.

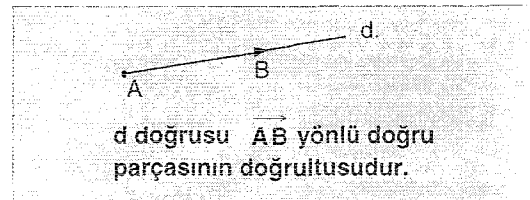
Başlangıç noktası A ve bitim noktası B olan yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ şeklinde gösterilir. Başlangıç noktasından bitim noktasına doğru olan yön *pozitif* (+), bitim noktasından başlangıç noktasına doğru olan yön *negatif* (-) yöndür.



- $-\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası $\overrightarrow{AB}$ ile zıt yönlüdür ve $\overrightarrow{BA}$ şeklinde ifade edilebilir.

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

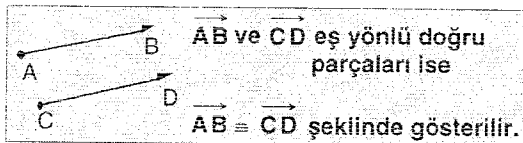
- $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasını üzerinde bulunduran doğruya $\overrightarrow{AB}$ 'nin *doğrultusu* denir.



- A ve B arasındaki uzaklığa $\overrightarrow{AB}$ 'nin *uzunluğu* (mutlak değeri) denir ve $|\overrightarrow{AB}|$ şeklinde gösterilir.

● EŞ YÖNLÜ DOĞRU PARÇALARI :

Aynı düzlemde, doğrultusu, yönü ve uzunlukları eşit olan yönlü doğru parçalarına *eş yönlü doğru parçaları* denir.



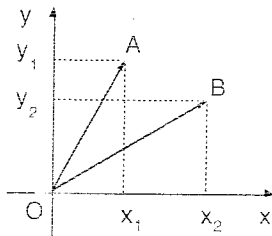
● VEKTÖR :

Birbirine eş olan yönlü doğru parçalarının oluşturduğu denklik sınıflarından herbirine *vektör* denir. Bir başka ifadeyle vektör : yönleri ve doğrultuları aynı, uzunlukları eşit olan yönlü doğru parçalarının oluşturduğu küme şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda, bir $\vec{AB}$ yönlü doğru parçası, $\vec{AB}$ vektörünü ifade eder.

● SIFIR VEKTÖRÜ :

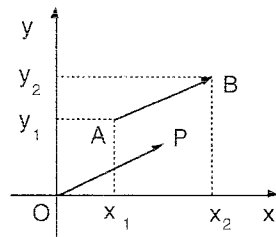
Başlangıç ve bitim noktaları aynı olan vektöre *sıfır vektörü* denir ve $\vec{0}$ şeklinde gösterilir.

● BİR VEKTÖRÜN ANALİTİK DÜZLEMDE GÖSTERİLİŞİ :



Başlangıç noktası O (0, 0) noktasında ve bitim noktası A (x_1, y_1) noktasında olan $\vec{OA}$ vektörü $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $\vec{OB} = (x_2, y_2)$ dir.

● KONUM (YER) VEKTÖRÜ :



Başlangıç noktası A (x_1, y_1) ve Bitim noktası B (x_2, y_2) olan $\vec{AB}$ vektörü $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ dir.

$\vec{OP} = \vec{AB}$ dir. $\vec{OP}$ 'ye $\vec{AB}$ 'nin konum (yer) vektörü denir.

Başlangıç noktası orijinde olan vektöre *konum (yer) vektörü* denir.

● BİR VEKTÖRÜN UZUNLUĞU (NORM) :

A (x_1, y_1) ve B (x_2, y_2) olmak üzere bir $\vec{AB}$ vektörünün uzunluğu

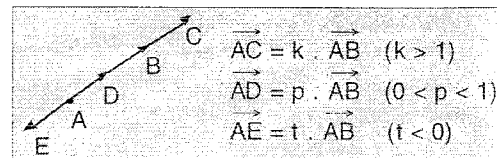
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

● BİR VEKTÖRÜN SKALERLE ÇARPIMI :

$\vec{A} = (x, y)$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere :

$$k \vec{A} = k \cdot (x, y) = (kx, ky) \text{ dir.}$$

Bir vektör $k \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpıldığında doğrultusu değişmez, yönü ve boyu değişebilir.



⌋ $k=-1$ skaler değeri ile çarpılan bir $\vec{AB}$ vektörünün doğrultusu değişmez. Ancak yönü 180° değişir.

$\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri için:

$$\begin{aligned} k \cdot \vec{AB} &= -1 \cdot \vec{AB} = -1 (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ &= \vec{BA} \end{aligned}$$

● VEKTÖRLERDE TOPLAMA ve ÇIKARMA

$\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ iki vektör ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki işlemleri tanımlayabiliriz.

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \vec{A} - \vec{B} &= (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ k(\vec{A} \pm \vec{B}) &= k\vec{A} \pm k\vec{B} \end{aligned}$$

● BİRİM VEKTÖR :

Uzunluğun 1 birim olan vektöre birim vektör denir.

$\vec{e}$ şeklinde gösterilir.

Eğer $\vec{e} = (a, b)$ birim vektör ise $|\vec{e}| = 1$ dir. Bu durumda

$$|\vec{e}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

□ Bir $\vec{A} = (x, y)$ vektörüyle,

1. Aynı doğrultuda ve aynı yönlü birim vektör :

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

2. Aynı doğrultulu ve zıt yönlü birim vektör :

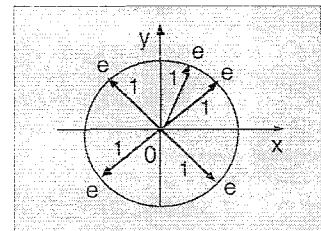
$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(-x, -y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

□ $\vec{A} = (x, y)$ vektörüne dik birim vektörler :

$$\pm \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

● BİRİM VEKTÖR - BİRİM ÇEMBER İLİŞKİSİ :

Başlangıç noktası orijinde, bitim noktası birim çemberde olan vektörler birer birim vektör belirtirler.



● TEMEL BİRİM VEKTÖRLER :

$\vec{e}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{e}_2 = (0, 1)$ vektörlerine *temel birim vektörler* denir.

$\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri sırasıyla $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \text{Bir } \vec{A} &= (x, y) \text{ vektörü} \\ \vec{A} &= x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 \text{ veya} \\ \vec{A} &= x \vec{i} + y \vec{j} \text{ şeklinde yazılabilir.} \end{aligned}$$

● VEKTÖRLERİN SKALER (İÇ) ÇARPIMI :

$\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ ve θ $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin skaler (iç) çarpımı :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cdot \cos \theta$$

Skaler çarpım $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ şeklinde de gösterilir.

□ Skaler Çarpımının Özellikleri :

$$i. \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$$

$$ii. \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$iii. \vec{C} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$$

$$iv. \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$v. (k \vec{A}) \cdot \vec{B} = k \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (k \cdot \vec{B})$$

$$vi. (k \vec{A}) \cdot (p \vec{B}) = (k p) (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$vii. \vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$$

$$viii. \vec{A} // \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$$

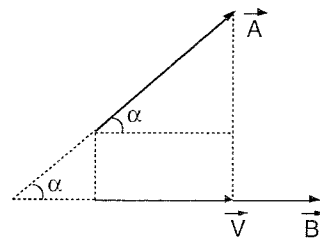
$$ix. \vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

● İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI :

θ , $\vec{A} = (x_1, y_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri arasındaki açı ise :

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

● İZDÜŞÜM VEKTÖRÜ :



$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açı α olmak üzere $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü $\vec{V}$ ise ;

$$\vec{V} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A} \cdot \cos \alpha}{|\vec{B}|} \quad \text{olur.}$$